Wielmożnemu Doktorowi
Szujskiemu, Sekretarzowi Jeneralnemu
Akademii umiejętności w Krakowie
&, &,
na dowód szacunku
Autor
Cetmajer

SOLUTIONS RELATIVES

AU

TRACÉ CURVILIGNE

DES

VOIES DE COMMUNICATION.

PARIS. — IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
Rue Racine, 28, près de l'Odéon.

SOLUTIONS RELATIVES

AU

TRACÉ CURVILIGNE

DES

VOIES DE COMMUNICATION.

PAR J. TETMAYER.

PARIS.

CARILIAN-GŒURY ET Vve DALMONT,

LIBRAIRES DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, nos 39 et 41.

1847

AVANT-PROPOS.

Les questions du tracé curviligne ont actuellement acquis une importance qu'elles n'avaient pas à une autre époque.

Les courbes à grand développement sont d'un usage très-fréquent dans les constructions modernes. On les emploie non-seulement dans les alignements des nouvelles voies de communication et des canaux, mais aussi dans ceux des routes ordinaires, où l'on ne considère plus la ligne droite comme la première condition de bonne exécution.

La détermination d'une grande courbe est un problème qui exige une solution rigoureuse. Mais la voie qui y mène est quelquefois longue; et l'on est ordinairement peu disposé à s'y engager lorsqu'il s'agit d'étudier une foule d'autres questions non moins importantes que comporte la rédaction d'un projet. J'ai donc pensé qu'il ne serait pas inutile d'indiquer des moyens de solution pour quelques cas qui se présentent souvent dans la pratique, et qui n'appartiennent pas cependant au nombre de ceux qu'on résout presque sans aucune recherche.

Je donne pour chaque problème :

1° Un procédé graphique par lequel on peut déterminer la courbe de manière qu'elle satisfasse aux conditions imposées;

2° Des formules destinées à l'évaluation numérique des longueurs que doivent avoir les tangentes correspondantes.

Quoique les formules soient en général assez simples, je n'ai pas cru devoir considérer les solutions graphiques comme moins utiles. Ces dernières mènent toujours plus promptement au but; et l'on n'obtiendra pas plus d'approximation par le calcul, lorsque les lignes et les angles qui entrent dans les formules ne sont pas mesurés directement sur le terrain. Aussi n'ai-je pas hésité de proposer l'emploi du trait, pour des problèmes mêmes qui dépendent des équations du troisième degré.

Il m'a aussi semblé nécessaire de joindre quelques nouvelles méthodes pour l'exécution des courbes sur le terrain, méthodes qui apportassent à la fois plus de facilité et plus de précision dans ces sortes d'opérations.

Le tout est donné en règles pratiques sans démonstrations. Cette forme facilitera la recherche des solutions particulières, et évitera une perte de temps aux personnes qui ne veulent connaître que les résultats. Mais comme, à très-peu de chose près, tout est présenté pour la première fois, il convenait peut-être aussi de prouver ce que l'on avance; j'ai donc pris le parti d'exposer en notes marginales ce qui me paraissait ne pas devoir être entièrement supprimé.

Mon intention n'a été que de faire voir la possibilité de venir en aide à la pratique dans l'exécution d'un genre de tracé dont l'importance ne manquera pas de s'accroître encore par suite des perfectionnements des nouvelles voies de communication qui sont à la veille de s'accomplir. Je me féliciterai de voir bientôt des recherches portées plus loin, et des résultats plus intéressants se grouper autour de ce que mon peu de loisir m'a permis d'offrir à la science du tracé.

Paris, le 23 octobre 1846.

SOLUTIONS RELATIVES

AU

TRACÉ CURVILIGNE

DES

VOIES DE COMMUNICATION.

COURBES DÉTERMINÉES D'APRÈS CERTAINES CONDITIONS.

I.

On a souvent à exécuter une courbe de raccordement pour laquelle un des points de contact est donné.

La parabole reste alors indéterminée.

La condition la plus convenable par laquelle on peut faire cesser l'indétermination, est sans contredit celle que la parabole résultant de la relation de position des deux points de contact soit la plus grande possible; car alors sa plus grande courbure sera un minimum (*).

(*) Le paramètre de la plus grande parabole devra être un maximum.

Nommant α l'angle des tangentes, t la première tangente donnée de longueur, et x la longueur cherchée de la seconde tangente, le paramètre de la courbe sera

$$p = \frac{4t^2x^2\sin^2\alpha}{(t^2+x^2+2tx\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}};$$

et posant $f'(x)=0$, on en tire

$$x = \frac{1}{2}t(\cos\alpha \pm \sqrt{9-\sin^2\alpha}).$$

Une construction fort simple donne le deuxième point de contact de cette parabole.

Du point C (*fig.* 1), milieu de la tangente SA donnée de longueur, et avec

---

Ces deux valeurs de x portées dans l'expression générale de la dérivée $f''(x)$ se vérifient, car elles donnent des quantités négatives.

Le problème admet donc deux solutions.

La première avec le radical positif répond directement à la question; elle donne la plus grande parabole dans l'angle SAB (*fig.* 1).

La deuxième avec le radical négatif donne la plus grande parabole dans l'angle SAB', supplément de celui SAB. Pour celle-ci x est négatif par suite de

$$\sqrt{9 - \sin^2\alpha} > \cos\alpha\,;$$

et il en doit être ainsi parce qu'en partant de l'angle ASB donné, il faut prendre une direction inverse pour se trouver sur la droite SB'. Considérée comme longueur absolue, cette deuxième valeur de x est égale à celle

$$x = \frac{1}{2}t\left(-\cos\alpha + \sqrt{9 - \sin^2\alpha}\right),$$

qu'on obtiendrait pour la première, si la parabole devait toucher les côtés de l'angle $ASB' = 180^\circ - \alpha$.

Lorsque α est de 90°, on a

$$x = t\sqrt{2},$$

expression qui représente la diagonale du carré ayant pour côté la tangente donnée de longueur. On pourrait donc alors, en construisant ce carré, déterminer la position du deuxième point de contact. Mais la construction généralement applicable que j'indique pour la solution du problème, sera même, dans ce cas particulier, plus expéditive. On s'en rend d'ailleurs facilement compte, en abaissant sur la seconde tangente la perpendiculaire CE, et menant le rayon CB, ce qui donne

$$SB = SE + \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{CE}^2},$$

ou bien

$$SB = \frac{1}{2}SA\left(\cos ASB + \sqrt{9 - \sin^2 ASB}\right)$$

comme ci-dessus.

Il existe dans cette parabole une relation très-simple entre les angles que fait avec les tangentes le diamètre SF. Comme ce diamètre doit être parallèle à celui DB, on a, à cause de $SG = 2SD$, $SFG = DBG = 90^\circ$,

$$FG = 2FB,$$
$$\text{tang}\,FSA = 2\,\text{tang}\,FSB.$$

un rayon égal à $\frac{3}{2}$ SA, décrivez un arc de cercle de manière à couper la seconde tangente en B : ce sera le deuxième point de contact du raccordement parabolique de moindre courbure.

On calculera d'ailleurs très-aisément la longueur de la seconde tangente au moyen de la formule

$$SB = \frac{1}{2} SA \left(\cos ASB + \sqrt{9 - \sin^2 ASB}\right).$$

L'extrême facilité avec laquelle on détermine cette courbe permet de la considérer dès à présent comme acquise à la pratique, et cette acquisition n'est pas sans quelque importance. C'est d'abord un cas résolu qui se présente peut-être plus souvent que tous les autres possibles pris ensemble. La solution fournit en outre une règle générale pour l'établissement des raccordements pour lesquels un point de contact étant donné, le second ne peut ou ne doit pas être à la même distance de l'angle sans que sa position soit autrement déterminée. Le cercle et la parabole à tangentes égales devenant alors impossibles, le raccordement par la plus grande parabole sera de rigueur. Quand ce dernier ne pourra non plus être exécuté, la connaissance de la position que doivent avoir ses points de contact, servira à déterminer la courbe la plus rapprochée de ce raccordement, et ayant ainsi le moins de courbure par rapport aux dispositions particulières de la localité.

II.

Lorsqu'on a une troisième tangente donnée de position, la détermination du raccordement parabolique de moindre courbure devient moins simple que dans le cas exposé ci-dessus. On établira cependant assez facilement les points de contact de ce raccordement par des procédés graphiques que je vais indiquer.

Prolongez indéfiniment AS (*fig.* 2), et sur la droite CD, menée par S parallèlement à la troisième tangente AB, faites SD = AB et SC = $\frac{1}{2}$ AB ; décrivez ensuite du point C avec le rayon CD, l'arc DE, et tirez FDHG de manière à avoir DF = HG. Les tangentes seront SG et SK = SF.

Il est évident qu'on obtiendrait le même résultat à l'aide du cercle DM décrit sur le diamètre CD, faisant alors IF = IG (*).

La droite FDG peut être une règle graduée qu'on tourne autour du point D jusqu'à ce qu'elle parvienne dans la position indiquée. Quel que soit du reste le moyen dont on se servira pour mener cette droite, il est certain qu'on pourra l'établir avec la dernière précision qu'admet le trait, et cela suffit évidemment pour notre objet.

(*) Quand on mène par le point S (*fig.* 2) de concours de deux tangentes de la parabole, la droite SD parallèle et égale à une troisième tangente AB comprise entre les deux premières, le diamètre FG, qui passe par l'extrémité D de la droite SD, passe aussi par le point de contact de la tangente adjacente SG. Il faut donc donner à ce diamètre une position telle que le paramètre de la courbe devienne un maximum.

La position du diamètre FG peut être déterminée par l'angle $DSL = x$, que fait avec SD, la droite SL perpendiculaire sur FG; et posant les angles $FSD = SAB = \alpha$, $GSD = SBA = \beta$ et la droite $SD = AB = c$, on a le paramètre de la courbe

$$p = \frac{4c \cos x \cos(\alpha + x) \cos(\beta - x)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

La dérivée $f'(x)$, égalée à zéro, fournit l'équation

$$\operatorname{tang}(\beta - x) - \operatorname{tang}(\alpha + x) - \operatorname{tang} x = 0.$$

Cette équation est graphiquement résolue lorsque la perpendiculaire CI, abaissée du point C sur le diamètre FG, fait les segments $IG = IF$, ce qui a toujours lieu si l'on construit avec le cercle DE ou avec celui DM; car on a alors

$$LG - LI = LF + LI;$$

et par suite de $LI = \frac{1}{2} DL$,

$$LG - LF - DL = 0,$$

ou bien

$$\operatorname{tang}(GSD - DSL) - \operatorname{tang}(FSD + DSL) - \operatorname{tang} DSL = 0.$$

Pour tracer par points les courbes DH (*fig.* 3) et DI, il n'est pas nécessaire de connaître leur nature. On sait d'ailleurs que la première est une hyperbole, ayant pour asymptotes les droites SF et SG. La courbe DI est également une hyperbole, dont les asymptotes PN et PO, parallèles aux droites SF et SG, partent du point P milieu de SD.

Si l'on voulait, pour éviter tout tâtonnement, résoudre le problème par l'intersection de deux courbes, on y parviendrait encore sans difficulté au moyen d'un cercle et d'une hyperbole.

En effet, l'arc de cercle DE (*fig.* 3) étant décrit comme ci-dessus, si par le point D, on mène arbitrairement les droites aa', bb', cc', etc., et qu'on prenne sur ces droites les parties $a'h$, $b'h$, $c'h$, etc., respectivement égales aux distances aD, bD, cD, etc. : l'hyperbole DH passant par les points h, h, h, etc., coupera le cercle DE au point H situé sur la droite FDG.

On peut aussi, pour avoir des points plus rapprochés, tracer l'hyperbole DI qui passe par les milieux i, i, i, etc., des droites aa', bb', cc', etc., et dont l'intersection avec le cercle DM, décrit sur le diamètre CD, donne également un deuxième point I de la droite FDG.

Mais on voit bien que cette voie est plus longue et nécessite une vérification du résultat obtenu, ce qui ramène aux procédés indiqués en premier lieu.

En résolvant l'équation

$$\operatorname{tang}^3 x - 2(\cot\alpha - \cot\beta)\operatorname{tang}^2 x - (2 + 3\cot\alpha\cot\beta)\operatorname{tang} x + \cot\alpha - \cot\beta = 0,$$

où α et β désignent les angles SAB et SBA, on connaîtra l'angle DSL $= x$, que fait avec la droite SD, la perpendiculaire SL abaissée sur le diamètre FG ; et l'on calculera les longueurs des tangentes par les formules

$$\mathrm{SK} = \frac{\mathrm{AB} \cdot \cos x}{\cos(\alpha + x)},$$

$$\mathrm{SG} = \frac{\mathrm{AB} \cdot \cos x}{\cos(\beta - x)}.$$

On aura, en effet, moins souvent occasion d'employer ce deuxième raccordement parabolique de moindre courbure. Mais indépendamment de l'avantage que son application peut procurer, il importe d'être averti qu'il ne suffit pas de connaître la relation de position qui convient aux points de contact de la plus grande parabole dans le cas d'une tangente donnée de longueur, pour déterminer cette courbe dans tout autre cas qui se présente.

III.

La forme d'un raccordement parabolique dépend essentiellement de la position qu'occupe le sommet de la courbe par rapport aux directions des alignements droits. La question de placer le sommet de la parabole en un point donné, peut donc, dans certains cas, devenir de première importance; et l'on sait que lorsqu'en même temps la courbe doit toucher deux droites données de position, le problème est du troisième degré. On le résoudra très-facilement par les mêmes procédés graphiques que j'ai indiqués pour la détermination de la plus grande parabole dans le cas qui précède.

Sur la droite SP (*fig.* 4) qui joint l'angle au point donné P, décrivez une demi-circonférence et tirez APCB, de manière que les segments PA et CB soient égaux. La droite AB sera tangente au sommet de la parabole (*).

(*) Tous les diamètres de la parabole sont perpendiculaires sur la tangente APB (*fig.* 4), menée au sommet P de la courbe, et celui SC, qui passe par le point de concours de deux autres tangentes SF, SG, fait en outre sur la première le segment CB = PA. Donc, si l'on décrit sur SP une demi-circonférence, et qu'on mène la droite APCB de manière à avoir CB = PA, on a en même temps SCP = 90°, et les deux conditions sont remplies.

On remarquera que le problème a été résolu avant d'être mis en équation, et que le moyen graphique employé à la solution a été déduit directement de l'énoncé même de la question. Il y a sans doute du tâtonnement dans ce procédé, comme il y en a dans les méthodes dont on se sert pour la résolution des équations numériques, méthodes qui sont cependant incontestablement plus efficaces que les formules algébriques, pour la détermination exacte des racines des équations du troisième et du quatrième degré. En réfléchissant sur l'analogie qui existe entre ces méthodes et le procédé graphique en question, on est vraiment porté à penser qu'en géométrie aussi bien qu'en arithmétique, les méthodes de tâtonnement sont les seuls moyens de solution qui conviennent à la nature des problèmes de degrés supérieurs au deuxième.

Pour les problèmes de géométrie, ces méthodes de solution directe dépendront toujours plutôt des coefficients de l'équation que de sa forme.

Ainsi, faisant les angles PSA $= \alpha$, PSB $= \beta$, PSC $= x$, ce dernier problème est exprimé par l'équation

$$\operatorname{tang}(\alpha + x) - \operatorname{tang}(\beta - x) - \operatorname{tang} x = 0,$$

laquelle étant développée prend une forme tout à fait différente de celle sous laquelle se présente l'équation du problème précédent, résolu par le même procédé.

On ferait $IA = IB$, si l'on construisait avec la demi-circonférence PIK décrite sur le diamètre PK, moitié de SP.

Les hyperboles PCH et PIH' peuvent être tracées de la manière exposée ci-dessus.

Pour avoir maintenant les points de contact F et G, il suffit d'élever sur AB, jusqu'à la rencontre de la tangente BS prolongée, la perpendiculaire PDE, et de faire $AF = AD$ et $BG = BE$.

L'équation

$$\operatorname{tang}^3 x + (2 + \cot\alpha \cot\beta) \operatorname{tang} x + \cot\beta - \cot\alpha = 0$$

exprime les relations qui doivent avoir lieu entre les angles $PSA = \alpha$, $PSB = \beta$, et celui $PSC = x$ que fait le diamètre SC avec la droite SP ; et les longueurs des tangentes sont données par les formules :

$$SG = \frac{SP \cos x \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\beta - x)\cos(\beta - x)\cos(\alpha + x)},$$

$$SF = \frac{SP \cos x \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + x)\cos(\alpha + x)\cos(\beta - x)}.$$

Lorsque le sommet de la courbe doit être sur une des tangentes données, la question devient beaucoup plus simple. Les solutions des divers problèmes qu'on peut alors former avec les trois autres conditions nécessaires pour déterminer la parabole, n'offriraient aucun intérêt.

IV.

Quand un alignement curviligne ne peut être exécuté par le cercle ni par la parabole, on y supplée ordinairement par une courbe composée de plusieurs arcs circulaires ou paraboliques.

Les questions les plus fréquentes qui donnent lieu à l'emploi des courbes composées d'arcs circulaires, exigent qu'on sache former de deux cercles de courbures le moins inégales une courbe pour laquelle on a deux points de contact donnés qui ne sont pas situés à la même distance de l'angle formé par les tangentes.

Un cas particulier de ce problème a été résolu par Bossut pour le tracé des voûtes en anse de panier à trois centres ; mais ce géomètre, étant parti de la supposition que l'angle des tangentes était toujours droit, la solution fournie par lui ne pouvait être applicable à aucune autre destination. En ne supposant à cet angle aucune grandeur déterminée, j'ai trouvé une propriété très-remarquable de la courbe dont il s'agit ; savoir, que les deux arcs de cercle qui remplissent la condition du problème se rencontrent au centre du cercle inscrit dans le triangle formé par les tangentes avec la droite qui joint les points de contact donnés (*).

Dès lors, les points désignés pour les contacts de la courbe, étant A (*fig.* 5) et B, il suffit de mener par le point C, auquel concourent les bissectrices des angles du triangle ASB, la droite DCE parallèle à AB ; et l'on a sur-le-champ les tangentes DA = DC, EB = EC, qui appartiennent aux deux cercles de courbures le moins inégales.

On détermine ordinairement le centre du cercle inscrit à un triangle par la bissection de deux angles quelconques de ce triangle. Il sera peut-être

---

(*) La voie que Bossut a suivie dans la recherche de son anse de panier, n'est pas la plus commode lorsqu'on traite le problème d'un point de vue général. On arrive plus aisément au but par la considération des angles.

Soient DCE (*fig.* 5) la tangente commune des deux arcs, AC, BC leurs cordes, et les angles $SAB = \alpha$, $SBA = \beta$, $SDE = x$. Les rayons seront

$$r = \frac{AC}{2 \sin \frac{1}{2} x},$$

$$r' = \frac{BC}{2 \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta - x)},$$

dont le rapport géométrique

$$\frac{r'}{r} = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{1}{2} x\right) \sin \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} (\beta - \alpha + x) \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta - x)},$$

ou bien

$$\frac{r'}{r} = \frac{\cos(\alpha - x) - \cos\alpha}{\cos(\alpha - x) - \cos\beta}$$

plus aisé de mener par le sommet S une droite indéfinie parallèle à AB, faire SF = SA, SG = SB, et tirer FA et GB. Ces deux dernières lignes se couperont au centre C du cercle inscrit au triangle ASB.

Les tangentes de la courbe seront :

$$DA = DC = \frac{AB.SA}{SA + SB + AB},$$

$$EB = EC = \frac{AB.SB}{SA + SB + AB}.$$

Un seul exemple suffira pour faire comprendre l'usage auquel peut servir cette courbe.

Soient données trois tangentes SA (*fig.* 6), SB, CD et deux points de contact A et B. On tracera d'abord un arc de cercle déterminé par les tangentes AC = CF, et ensuite, dans le triangle EDB, la courbe définie ci-dessus.

---

doit être pour $\alpha > \beta$ un minimum, et pour $\beta > \alpha$ un maximum.

L'équation $f'(x) = 0$ donne

$$\sin(\alpha - x) = 0,$$

donc

$$x = \alpha;$$

et portant cette valeur de x dans l'expression générale de la dérivée $f''(x)$, il vient

$$\frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\cos^2\beta},$$

quantité positive pour $\alpha > \beta$ et négative pour $\beta > \alpha$.

Mais de ce que SDE = SAB, il s'ensuit que DAC = $\frac{1}{2}$ SAB, EBC = $\frac{1}{2}$ SBA, et que les cordes AC, BC se rencontrent au centre du cercle inscrit au triangle ASB.

Les droites FA et GB se coupent au centre C de ce cercle ; car menant DC parallèlement à AB, on a par les triangles semblables DAC, SAF,

$$DC = DA$$

et par conséquent

$$DAC = \frac{1}{2} SDC = \frac{1}{2} SAB$$

Le résultat ne serait plus le même si l'on plaçait la courbe en question dans l'angle ACD. Il y aura donc lieu de voir ce qui produira un meilleur effet, lorsque différentes dispositions seront à la fois possibles. Et s'il arrivait que par suite d'une position particulière des tangentes et points donnés le problème pût être résolu par le cercle, malgré un nombre de conditions supérieur à celui qu'admet cette ligne, tous les arcs formant parties de la courbe composée, se confondraient alors en un arc de cercle unique.

V.

Le tracé d'une courbe composée d'arcs circulaires qui doit passer par un grand nombre de points, ne saurait être assujetti à aucune règle généralement applicable. C'est seulement en examinant la position des points donnés qu'on parvient à connaître la solution la plus convenable que peut recevoir un problème de ce genre. Je me bornerai donc à indiquer le moyen qui me paraît le plus propre pour cet examen.

Soient SZ (*fig.* 7) et SY les directions des alignements rectilignes, et A, B, C, D, E, F, G les points par lesquels il s'agit de faire passer la courbe.

Pour faciliter la solution, on peut se proposer de former la courbe d'autant d'arcs de cercle qu'on a de cordes en joignant les points donnés entre eux et les deux extrêmes aux points de contact adjacents. Menant alors par le point A une première tangente aAb, on détermine entièrement la courbe. Le tracé ultérieur des tangentes se fera par la construction d'une suite de triangles isocèles, tels que AbB, BcC, etc., dont on forme chacun en prolongeant le côté de celui qui le précède.

D'abord, pour que cette construction puisse avoir lieu, il faut que les angles A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, formés par les intersections des cordes entre elles et des deux extrêmes avec les alignements droits, soient tels que dans toutes les suites possibles de ces angles, pris en nombre impair, la somme des valeurs de ceux qui occupent dans la suite un rang impair, soit plus grande que la somme des valeurs de ceux de rang pair (*).

Or, cette condition étant remplie, il est évident que l'angle Sab, déterminé

(*) Quand on désigne par x l'angle Sab (*fig.* 7), et par b, c, d, e, etc., les sommets des triangles isocèles formés par les tangentes avec les cordes, on a les angles

$$\begin{gathered}
b\mathrm{AB} = \mathrm{A}_1 - x \\
c\mathrm{BC} = \mathrm{A}_2 - \mathrm{A}_1 + x \\
d\mathrm{CD} = \mathrm{A}_3 - \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_1 - x \\
e\mathrm{DE} = \mathrm{A}_4 - \mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_2 - \mathrm{A}_1 + x \\
f\mathrm{EF} = \mathrm{A}_5 - \mathrm{A}_4 + \mathrm{A}_3 - \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_1 - x \\
g\mathrm{FG} = \mathrm{A}_6 - \mathrm{A}_5 + \mathrm{A}_4 - \mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_2 - \mathrm{A}_1 + x;
\end{gathered}$$

et comme tous ces angles doivent être positifs, il s'ensuit que

$$\begin{gathered}
\mathrm{A}_1 > x \\
\mathrm{A}_2 + x > \mathrm{A}_1 \\
\mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_1 > \mathrm{A}_2 + x \\
\mathrm{A}_4 + \mathrm{A}_2 + x > \mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_1 \\
\mathrm{A}_5 + \mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_1 > \mathrm{A}_4 + \mathrm{A}_2 + x \\
\mathrm{A}_6 + \mathrm{A}_4 + \mathrm{A}_2 + x > \mathrm{A}_5 + \mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_1;
\end{gathered}$$

donc à fortiori

$$\begin{gathered}
\mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_1 > \mathrm{A}_2 \\
\mathrm{A}_4 + \mathrm{A}_2 > \mathrm{A}_3 \\
\mathrm{A}_5 + \mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_1 > \mathrm{A}_4 + \mathrm{A}_2 \\
\mathrm{A}_5 + \mathrm{A}_3 > \mathrm{A}_4 \\
\mathrm{A}_6 + \mathrm{A}_4 + \mathrm{A}_2 > \mathrm{A}_5 + \mathrm{A}_3 \\
\mathrm{A}_6 + \mathrm{A}_4 > \mathrm{A}_5 \\
\text{etc.}
\end{gathered}$$

Maintenant puisqu'on doit avoir $\mathrm{A} > x$, l'angle x ne peut jamais devenir si grand qu'on ait $x = \mathrm{A}$; on aura donc A pour la première limite supérieure de l'angle x.

De même, si l'on doit avoir $\mathrm{A}_2 + x > \mathrm{A}_1$, l'angle x ne peut jamais devenir si petit qu'on ait $\mathrm{A}_2 + x = \mathrm{A}_1$ ou $x = \mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2$. On aura par conséquent $\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2$ pour la première limite inférieure de l'angle x. Mais si dans $\mathrm{A}_2 + x > \mathrm{A}_1$, on avait $\mathrm{A}_2 > \mathrm{A}_1$ on pourrait faire x aussi petit qu'on voudrait sans détruire la relation $\mathrm{A}_2 + x > \mathrm{A}_1$ laquelle ne donnerait alors aucune limite inférieure pour l'angle indéterminé x.

En continuant de chercher ainsi les valeurs de x qui rendent la construction impossible, on trouve pour cet angle une suite de limites supérieures et une autre de limites inférieures; et il est clair que la plus petite valeur de celles de la première suite et la plus grande de celles qui forment la deuxième, constituent les deux limites définitives qu'il importe de connaître.

par la position donnée à la première tangente aAb, admet encore des limites qu'il ne saurait atteindre sans rendre la construction impossible.

Pour connaître ces limites, on comparera les valeurs

$$\begin{gathered} A_1 \\ A_1 + A_3 - A_2 \\ A_1 + A_3 + A_5 - A_2 - A_4 \\ A_1 + A_3 + A_5 + A_7 - A_2 - A_4 - A_6 \end{gathered}$$

qui seront toutes positives, et dont la plus petite représentera la limite supérieure de l'angle Sab.

On écrira ensuite :

$$\begin{gathered} A_1 - A_2 \\ A_1 + A_3 - A_2 - A_4 \\ A_1 + A_3 + A_5 - A_2 - A_4 - A_6 \end{gathered}$$

et la plus grande valeur positive de ces dernières sera la limite inférieure de l'angle Sab. Si elles étaient toutes négatives, l'angle en question n'aurait pas de limite inférieure et pourrait être fait aussi petit que l'on voudrait.

On prendra par conséquent pour l'angle Sab une valeur quelconque comprise entre les limites L et l, par exemple

$$Sab = \frac{L + l}{2}$$

et l'on dessinera la courbe. Le résultat montrera le mieux ce qui reste à faire pour donner à la courbe une forme qui convient à la nature de la voie et pour l'assujettir en même temps à passer par le plus grand nombre possible de points primitivement adoptés.

VI.

Il importe de former d'arcs paraboliques les courbes à inflexion pour que la courbure de la voie soit peu prononcée aux environs du point où elle change de sens.

On établit ordinairement l'inflexion sur la partie intermédiaire du zigzag que forment les lignes droites du tracé.

Pour donner à la courbe une forme convenable, il me semble qu'il faudrait satisfaire aux deux conditions suivantes :

1° Qu'au point de jonction des deux paraboles, leurs rayons de courbure soient égaux, afin qu'il n'y ait pas de discontinuité dans la marche de la courbe composée ;

2° Qu'en considérant séparément chacune de ces paraboles, on ait en même temps deux raccordements de moindre courbure.

Pour cela, on décrira du point M (*fig.* 8), milieu de AB, avec un rayon égal à $\frac{3}{2}$ AB, le cercle CD, et après avoir élevé sur AB les perpendiculaires AE, BF jusqu'à la rencontre des droites CE, DF parallèles à AB, on tirera EF. Le point d'intersection P donnera le point de contact des deux paraboles ; et l'on aura les points de contact extrêmes G et H, en menant PG et PH respectivement parallèles à BC et AD (*).

(*) L'expression

$$\frac{p}{\sin^3\omega}$$

représente le rayon de courbure en un point quelconque d'une courbe du second degré, dont le demi-paramètre est p et ω l'angle que fait en ce point la tangente avec le rayon vecteur mené du foyer. Mais si t est cette tangente et t' une autre tangente qui coupe la première sous l'angle α, on a dans la parabole

$$\frac{p}{\sin^3\omega} = \frac{2t^2}{t' \sin\alpha}.$$

Donc, prenant P (*fig.* 8) pour le premier point de contact, les conditions ci-dessus sont exprimées par l'équation

$$\frac{AP}{\sin BAC\,(\cos BAC + \sqrt{9 - \sin^2 BAC})} = \frac{AB - AP}{\sin ABD\,(\cos ABD + \sqrt{9 - \sin^2 ABD})}$$

qui donne la valeur de AP.

Par la construction indiquée on fait d'abord

$$AE = \frac{1}{2} AB\,(\cos BAC + \sqrt{9 - \sin^2 BAC}) \sin BAC,$$

$$BF = \frac{1}{2} AB\,(\cos ABD + \sqrt{9 - \sin^2 ABD}) \sin ABD;$$

La position du point P est donnée par la distance

$$AP = \frac{AB \sin BAC\,(\cos BAC + \sqrt{9 - \sin^2 BAC})}{\sin BAC\,(\cos BAC + \sqrt{9 - \sin^2 BAC}) + \sin ABD\,(\cos ABD + \sqrt{9 - \sin^2 ABD})}$$

et les longueurs des tangentes extrêmes peuvent être calculées par la formule connue

$$AG = \frac{1}{2} AP\,(\cos BAC + \sqrt{9 - \sin^2 BAC}),$$

$$BH = \frac{1}{2}(AB - AP)\,(\cos ABD + \sqrt{9 - \sin^2 ABD}).$$

Mais si l'on voulait porter au maximum le plus petit rayon de courbure d'une courbe à inflexion, on ne pourrait plus disposer les paraboles de manière qu'au point où elles se touchent, leurs courbures soient égales.

Toutes les fois que les deux paraboles dont on forme un alignement à inflexion doivent être déterminées par une même condition, il en résulte entre leurs paramètres cette relation qu'on ne peut augmenter l'un sans diminuer l'autre. Donc, pour réduire au minimum la plus grande courbure d'un tel alignement, il faut faire les deux paramètres à la fois égaux et les plus grands possibles. On y parvient par la construction suivante :

Du milieu M (*fig.* 9) de la partie intermédiaire AB et avec un rayon égal à $\frac{3}{2}$ AB, décrivez le cercle CD, menez BC, AD et sur les droites AE, BF qui joignent les angles aux milieux de BC et AD, abaissez les perpendiculaires BG et AH. Prenez ensuite sur les droites indéfinies AI, BK menées perpendiculairement à AB, les troisièmes proportionnelles AI à BF et AH, BK à AE et BG, et tirez IK qui coupera AB au premier point de contact P (*).

---

et menant ensuite EF, on obtient par les triangles semblables PAE, PBF,

$$\frac{AP}{AE} = \frac{AB - AP}{BF}.$$

(*) En égalant les paramètres (*fig.* 9)

$$\frac{4 AP \sin CAE \sin^2 BAE}{\sin BAC} = \frac{4(AB - AP) \sin DBF \sin^2 ABF}{\sin ABD}$$

Pour avoir les points de contact extrêmes L et N, il suffit de mener PL et PN respectivement parallèles à BC et AD.

Une expression directe de la longueur AP ne serait pas commode pour le calcul. Il sera plus aisé de chercher d'abord les angles BAE et ABF dont les tangentes sont

$$\text{tang BAE} = \frac{1}{2}\left(-3\cot \text{BAC} + \sqrt{8 + 9\cot^2 \text{BAC}}\right),$$

$$\text{tang ABF} = \frac{1}{2}\left(-3\cot \text{ABD} + \sqrt{8 + 9\cot^2 \text{ABD}}\right),$$

et qui feront connaître ceux CAE=BAC—BAE, DBF=ABD—ABF, et de calculer ensuite

$$\text{AP} = \frac{\text{AB}\sin \text{BAC}\sin \text{DBF}\sin^2 \text{ABF}}{\sin \text{ABD}\sin \text{CAE}\sin^2 \text{BAE} + \sin \text{BAC}\sin \text{DBF}\sin^2 \text{ABF}},$$

$$\text{AL} = \frac{\text{AP}\sin \text{BAE}}{\sin \text{CAE}},$$

$$\text{BN} = \frac{(\text{AB} - \text{AP})\sin \text{ABF}}{\sin \text{DBF}}.$$

Il est évident que les angles donnés étant égaux on n'a qu'à former la

---

des deux paraboles, on en tire la valeur de AP qui répond à la question, lorsque les angles CAE, BAE, DBF, ABF sont déterminés par la relation

$$\text{tang BAE} = 2\,\text{tang CAE},$$
$$\text{tang ABF} = 2\,\text{tang DBF},$$

qui convient à la plus grande parabole dans le cas d'une tangente donnée de longueur.

Cette relation est établie par la construction; et l'on a fait en outre

$$\frac{\text{BK}}{2\text{AB}} = \frac{\sin \text{CAE}\sin^2 \text{BAE}}{\sin \text{BAC}},$$

$$\frac{\text{AI}}{2\text{AB}} = \frac{\sin \text{DBF}\sin^2 \text{ABF}}{\sin \text{ABD}},$$

de sorte que les deux paramètres égalés sont représentés dans la figure par l'équation

$$\text{AP.BK} = (\text{AB} - \text{AP})\,\text{AI},$$

à laquelle satisfont les triangles semblables API et BPK.

courbe des plus grandes paraboles ayant leur point de contact commun sur le milieu de la partie intermédiaire du zigzag, et toutes les conditions des deux problèmes ci-dessus se trouveront remplies.

TRACÉ DES COURBES SUR LE TERRAIN.

ARC DE CERCLE.

On ne saurait imaginer pour l'exécution des raccordements circulaires à grand développement, un procédé plus convenable que celui par ordonnées rectangulaires portées sur les tangentes. Car on a ainsi pour l'opération deux bases invariablement établies et suffisamment rapprochées de la courbe ; et comme chaque ordonnée part directement d'une de ces bases, l'inexactitude d'un point ne peut aucunement influer sur la marche ultérieure du tracé. Il importerait seulement d'abréger le travail préparatoire qu'exige cette méthode.

Étant donnés le rayon r, l'angle α que forment les alignements droits, et par conséquent la longueur de la tangente correspondante

$$t = r \cot \frac{1}{2} \alpha,$$

il conviendrait peut-être de commencer par déterminer l'angle β

$$\sin \beta = \frac{d}{2r},$$

d étant la distance adoptée pour l'écartement des piquets, et de calculer ensuite les ordonnées et les abscisses comptées à partir du point de contact, comme il suit :

$$\begin{array}{ll} y' = 2r \sin^2 \beta & x' = r \sin 2\beta \\ y'' = 2r \sin^2 2\beta & x'' = r \sin 4\beta \\ y''' = 2r \sin^2 3\beta & x''' = r \sin 6\beta \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

Si l'on trouvait $\beta = 0° \, 32' \, 13''$ par exemple, on prendrait $\beta = 0° \, 30'$ pour rendre plus simples les multiples de cet angle. La distance d diminuerait aussi ; mais il n'en résulterait évidemment aucun inconvénient.

Ce calcul se fera très-aisément par les logarithmes ; et la courbe sera établie par des points équidistants.

Les tangentes sont quelquefois inaccessibles, et il arrive presque toujours en même temps qu'on ne trouve pas dans l'espace où la courbe doit être tracée, une autre ligne qui puisse servir de base à l'opération. Pour ce cas, dans lequel on procède ordinairement par tâtonnement, j'indiquerai une méthode rigoureuse et même très-expéditive.

Le rayon étant r, liez ensemble deux cordeaux c (*fig.* 10) et c' égaux entre eux, et à la distance qu'il convient de donner aux piquets, fixez à leurs extrémités une base inflexible

$$b=\frac{c^2}{r};$$

et après avoir d'abord appliqué le sommet du triangle ainsi formé au point de contact A (*fig.* 11) et le milieu m de sa base sur la tangente SA, portez-le ensuite toujours de manière que c soit dans le prolongement de c' ; tous les points p, p', p'' ainsi obtenus seront à la courbe (*).

Si l'on suppose à ce triangle un côté de 20 mètres et une base de $0^{m}.20$, le rayon du cercle sera de deux kilomètres. On peut donc tracer de cette manière une courbe à grand rayon. Mais ici l'erreur commise en un point se

---

(*) Quand on a dans un cercle deux cordes AB, BC (*fig.* 12) égales, et qu'on prolonge une AB de BD = AB = BC et mène DC, on forme ainsi un triangle isocèle DBC semblable à celui BRC qui a les rayons pour côtés et la corde BC pour base. Car on a l'angle ABC = 2RBC, et en même temps ABC = 2BCD, donc RBC = BCD; et comparant ces triangles, on trouve

$$DC=\frac{\overline{BC}^2}{BR}.$$

Or, la tangente BE étant perpendiculaire sur le rayon BR, il en résulte

$$RBC+EBC=90^{\circ},$$

et par suite de RBC = BCD,

$$BCD+EBC=90^{\circ},$$
$$BEC=90^{\circ};$$

cette tangente est donc en même temps perpendiculaire sur la base du petit triangle isocèle DBC, et coupe par conséquent cette base en deux parties égales.

communique à tous ceux qui le suivent et doit nécessairement amener une déviation sensible, lorsque la chaîne continue de triangles est très-considérable. Il faut donc exécuter la courbe par moitié, en partant successivement de chacun des points de contact ; et quand elle sera très-développée, on fera encore mieux de déterminer la position de la tangente au sommet du raccordement et d'opérer dans quatre directions différentes. Du reste, l'extrême facilité du procédé permettra d'effectuer promptement une rectification devenue nécessaire ; et il sera toujours plus commode de se servir de cette méthode, que de toute autre qu'on puisse employer dans les circonstances dont il s'agit.

On peut encore faire usage de ce procédé pour guider le travail des terrassiers entre deux points consécutifs d'un raccordementcirculaire tracé par la méthode précédente. Les points de la courbe étant alors équidistants, on menera facilement une tangente par chacun d'eux et l'on appliquera le triangle indiqué ci-dessus.

PARABOLE.

Quand on prend pour l'axe des abscisses une tangente de la parabole, le calcul des ordonnées parallèles à l'axe de la courbe est très-facile.

Les tangentes données étant t et t', et α l'angle sous lequel elles se coupent, la sous-tangente du raccordement sera

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{t^2 + t'^2 + 2tt' \cos \alpha};$$

et si l'on divise les tangentes en un même nombre n de parties égales pour mener par les points de division autant d'ordonnées à la courbe, il suffit de calculer une seule fois

$$m = \frac{s}{2n^2},$$

puisqu'on a, à partir de chacun des points de contact,

$$
\begin{aligned}
y' &= m \\
y'' &= 4m \\
y''' &= 9m \\
y'''' &= 16m \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

On trouve les angles β et δ que ces ordonnées doivent faire avec les tangentes t et t', par les formules

$$\sin\beta = \frac{t' \sin\alpha}{2s},$$

$$\sin\delta = \frac{t \sin\alpha}{2s}.$$

Dans la parabole à tangentes égales on a $\beta = \delta = \frac{1}{2}\alpha$ et $s = t\cos\frac{1}{2}\alpha$.

On peut se servir de cette méthode lorsque la localité ne permet pas de mener à la courbe la tangente parallèle à la corde de contact. Car ce cas excepté, la parabole admet un tracé beaucoup plus simple qui paraît n'avoir pas encore été aperçu, bien qu'il résulte d'une propriété très-connue de cette courbe. Il consiste à circonscrire à la parabole un polygone symétrique en augmentant successivement le nombre de ses côtés, dont on connaît les points communs avec la courbe.

Menez par m (*fig.* 13) et m, milieux de SA et de SB, la droite mm, le point p milieu de mm sera à la courbe ; menez ensuite par m' et m', milieux de mp et mA, la droite $m'm'$, le point p' milieu de $m'm'$ sera à la courbe ; et toutes les autres lignes $m''m''$, $m'''m'''$ menées de cette manière donneront par leurs milieux p'', p''' autant de points appartenant à la parabole.

Du reste, le moyen par lequel on parvient à établir une courbe sur le terrain, est indifférent pourvu qu'il donne un résultat conforme aux conditions essentielles de raccordement. Il ne sera donc pas inutile de connaître le défaut d'un procédé très-usité dans la pratique.

D'après ce procédé, on divise les tangentes SA, SB (*fig.* 14) en un même nombre de parties égales, et l'on mène les droites Aa', ab', bc', cd', de', eB qui donnent par leurs intersections la courbe $App'p''p'''B$.

Cette courbe est une parabole ; mais elle coupe les côtés de l'angle qu'elle devait toucher. Les segments AC, BD, interceptés par ses branches sont respectivement doubles de ceux qui résultent de la division des droites SA et SB (*).

(*) Quand on considère deux quelconques des droites qui se coupent sur la courbe, comme de' (*fig.* 14) et cd'; et qu'on désigne par a et b les droites SA et SB, par n le nombre de divisions faites, et par m le nombre de divisions contenues dans le segment Sd, on a

$$Sd=\frac{am}{n},\qquad Se'=\frac{b(n-m+1)}{n},$$

$$Se=\frac{a(m+1)}{n},\quad Sd'=\frac{b\,(n-m)}{n},$$

et prenant Sx et Sy pour les axes des coordonnées, on obtient pour l'équation de la droite de'

$$anmy=-bn\,(n-m+1)\,x+ab\,(mn-m^2+m)\,; \qquad (1)$$

et pour celle de cd'

$$an\,(m+1)\,y=-bn\,(n-m)\,x+ab\,(mn-m^2+n-m). \qquad (2)$$

Retranchant (1) de (2), il reste

$$any=bnx+ab\,(n-2m),$$

d'où

$$m=\frac{bnx+abn-any}{2ab};$$

et cette valeur substituée dans (1) donne

$$a^2ny^2-2abnxy+b^2nx^2-2a^2b\,(n+1)\,y-2ab^2(n+1)\,x+a^2b^2\,(n+2)=0,$$

équation qui représente évidemment une parabole.

Résolue par rapport à y, elle prend la forme

$$y=\frac{b}{n}\left(\frac{n\,(a+x)+a}{a}\pm\sqrt{\frac{4nx\,(n+1)+a}{a}}\right); \qquad (3)$$

et quand on pose $x=0$ dans l'ordonnée du diamètre à partir duquel les ordonnées de la courbe doivent être comptées, il vient

$$y=b+\frac{b}{n};$$

d'où l'on voit que ce diamètre rencontre la droite Sy au delà du point B à une distance BE $=\frac{b}{n}$. On a donc pour tous les points de la courbe, situés à gauche du diamètre EF

Plusieurs géomètres ont en effet remarqué que cette parabole n'est pas tangente aux côtés de l'angle donné. Cependant, comme il s'agissait d'une courbe de raccordement, il importait principalement de montrer sa marche au delà des points par lesquels elle sort de l'angle, afin qu'on puisse juger de la saillie des jarrets qu'un tel raccordement doit nécessairement faire avec les lignes droites du tracé.

Il est possible que ce tracé doive son origine à une méthode rigoureuse inexactement exposée. Car si l'on joint les divisions a, b, c, d, e, (*fig.* 15) de la tangente SA, aux divisions correspondantes a', b', c', d', e', de la tangente SB sans y comprendre les points A et B, les points p', p', p'', p''', p'''' milieux des côtés du polygone ainsi formé, appartiennent à la parabole qui touche, aux points A et B, les droites SA et SB (*).

$$y=\frac{b}{n}\left(\frac{n(a+x)+a}{a}-\sqrt{\frac{4nx(n+1)+a}{a}}\right). \qquad (4)$$

Faisant maintenant $y=0$ dans (4) et $x=0$ dans (3) pour avoir les points de la courbe qui se trouvent sur les droites Sx et Sy, on obtient

$$x=\frac{a}{n}(n+1\pm1),$$

$$y=\frac{b}{n}(n+1\pm1).$$

La courbe a donc deux points communs avec chacune des droites Sx, Sy; et les positions de ces points sont données par leurs distances au point S,

$$x'=a=\text{SA}, \qquad x''=a+\frac{2a}{n}=\text{SA}+\text{AC},$$

$$y'=b=\text{SB}, \qquad y''=b+\frac{2b}{n}=\text{SB}+\text{BD}.$$

(*) Lorsqu'on a prouvé que les droites af, bg, ch, di, etc. (*fig.* 15), menées par les points de division parallèlement à la sous-tangente SC, passent les unes par les sommets s, s', s'' etc., les autres par les milieux p, p', p'' etc., des côtés du polygone, on obtient sur-le-champ l'équation de la courbe. Mais pour cela, il faut avoir les équations de quatre droites telles que bb', cc', ek et di dont les deux premières forment un sommet s', et les deux autres doivent passer l'une par ce sommet, et l'autre par le milieu p' du côté adjacent ss'.

Pour rapporter toutes ces lignes aux droites Ay et Ax parallèle à SC, soit AS $=t$, AD $=s$, Je ne proposerai pas d'opérer ainsi sur le terrain. Ce serait ajouter encore une méthode au grand nombre de celles qui donnent les points de la courbe

---

n le nombre de divisions faites sur chacune des tangentes, m le nombre de divisions contenues dans le segment Ab, on aura

$$\mathrm{A}b=\frac{tm}{n},\quad \mathrm{A}r=\frac{sm}{n},\quad rb'=\frac{t(n+m)}{n};$$

$$\mathrm{A}c=\frac{t(m+1)}{n},\quad \mathrm{A}q=\frac{s(m+1)}{n},\quad qc'=\frac{t(n+m+1)}{n};$$

$$\mathrm{A}e=\frac{t(2m+1)}{n};$$

$$\mathrm{A}d=\frac{2tm}{n};$$

et l'on trouvera pour les équations des droites bb' et cc'

$$y=\frac{tnx}{sm}+\frac{tm}{n},$$

$$y=\frac{tnx}{s(m+1)}+\frac{t(m+1)}{n};$$

et pour celles des droites ek et di parallèles à l'axe des abscisses

$$y=\frac{t(2m+1)}{n},$$

$$y=\frac{2tm}{n}.$$

Posant maintenant pour le point de rencontre des droites bb' et ek

$$\frac{tnx}{sm}+\frac{tm}{n}=\frac{t(2m+1)}{n},$$

et pour celui de cc' et ek

$$\frac{tnx}{s(m+1)}+\frac{t(m+1)}{n}=\frac{t(2m+1)}{n},$$

l'une et l'autre de ces équations donne

$$x=\frac{sm(m+1)}{n^2}.$$

Ainsi les droites bb', cc' et ek ont une intersection commune. Donc la droite ek passe par s', par l'intersection des lignes droites et dont les divers inconvénients sont généralement connus. Mais on pourra employer de préférence ce tracé sur le plan du projet ; car les tangentes étant divisées en de très-petites parties, le polygone se confond dans la courbe (*fig.* 16).

Pour réunir ici à peu près tout ce qui peut servir à la solution des questions les plus ordinaires du tracé curviligne, j'indiquerai encore un moyen très-simple par lequel on se rendra compte du résultat qu'on obtiendrait par un raccordement parabolique en donnant à ses tangentes certaines longueurs déterminées.

On mènera par les points de contact A (*fig.* 17) et B deux droites indéfinies parallèles à celle CM qui joint l'angle au milieu de la corde de contact, et l'on tirera DCE perpendiculairement à CM.

Les droites DB et AE se couperont au sommet S de la courbe.

La droite EP, perpendiculaire sur EM, fera sur le prolongement de CM un segment PC égal au demi-paramètre ou rayon de la plus grande courbure de la parabole.

Prenant sur la droite indéfinie FR, menée par A perpendiculairement à AC, la partie FA égale à la droite MG perpendiculaire sur AC, et faisant l'angle $FCR = 90°$, AR sera le rayon de courbure correspondant au point de contact A.

Si une des tangentes, AC par exemple, faisait avec la droite CM un angle $ACM = 90°$ ou $ACM > 90°$, on ne trouverait plus par cette construction le sommet de la parabole ; il serait dans le premier cas au point de contact A'

---

celle ch par s ; et comme le point d est le milieu de ce, la droite di parallèle à ek et ch, passe par p' milieu de ss'.

Pour avoir l'équation de la courbe, il suffit de tirer de celle de la droite di la valeur de m, et de porter cette valeur dans l'équation de la droite bb'. On obtient

$$y^2 = \frac{4t^2x}{s}$$

équation d'une parabole rapportée à sa tangente, et au diamètre passant par le point de contact.

et dans le second en dehors de l'arc compris entre les points A et B. La droite AR représenterait alors le rayon de la plus grande courbure du raccordement.

Désignant toujours par t et t' les tangentes d'un raccordement parabolique et par α l'angle qu'elles forment, on a en général le rayon de courbure appartenant au sommet de la parabole ou son demi-paramètre

$$\frac{1}{2}p = \frac{2t^2t'^2 \sin^2\alpha}{(t^2 + t'^2 + 2tt' \cos\alpha)^{\frac{3}{2}}},$$

et les deux autres qui correspondent aux points de contact des tangentes t et t'

$$\rho = \frac{2t^2}{t' \sin\alpha},$$

$$\rho' = \frac{2t'^2}{t \sin\alpha}.$$

Enfin pour $t = t'$, ces expressions se réduisent à

$$\frac{1}{2}p = \frac{t \sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{\cos \frac{1}{2}\alpha},$$

$$\rho = \frac{2t}{\sin\alpha}.$$

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
Rue Racine, n° 28, près de l'Odéon.

Fig. 1.

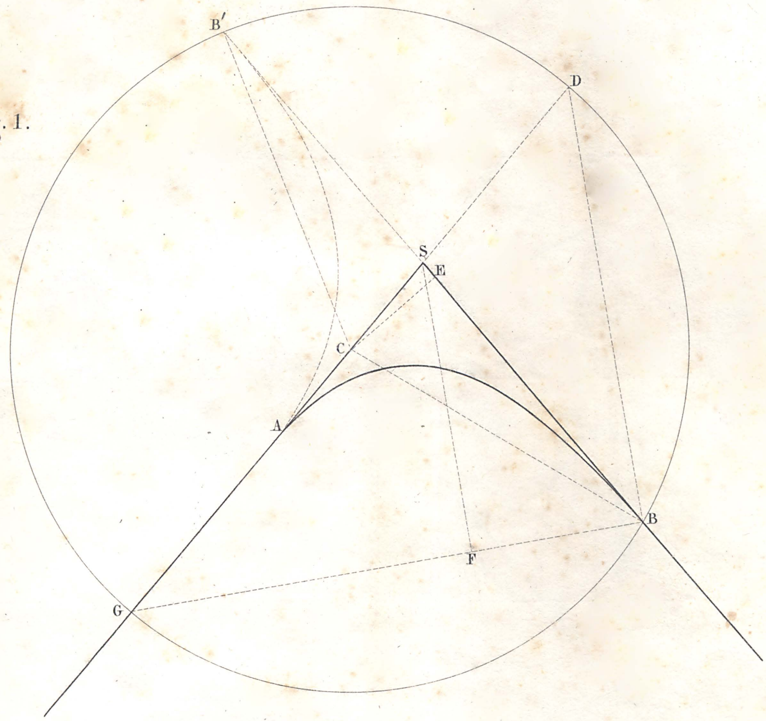
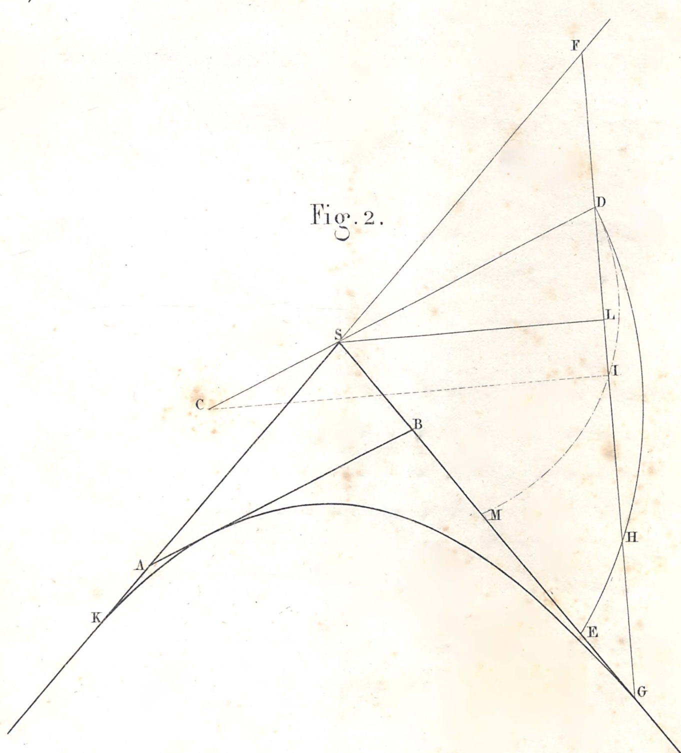


Fig. 2.



Lemaitre sc.

Fig. 3.

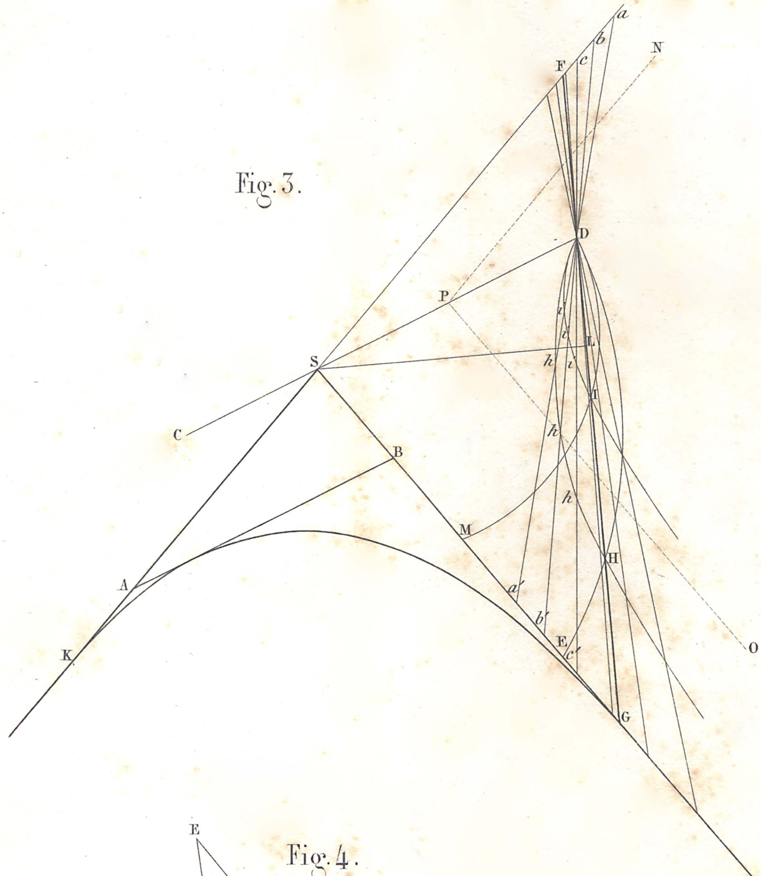
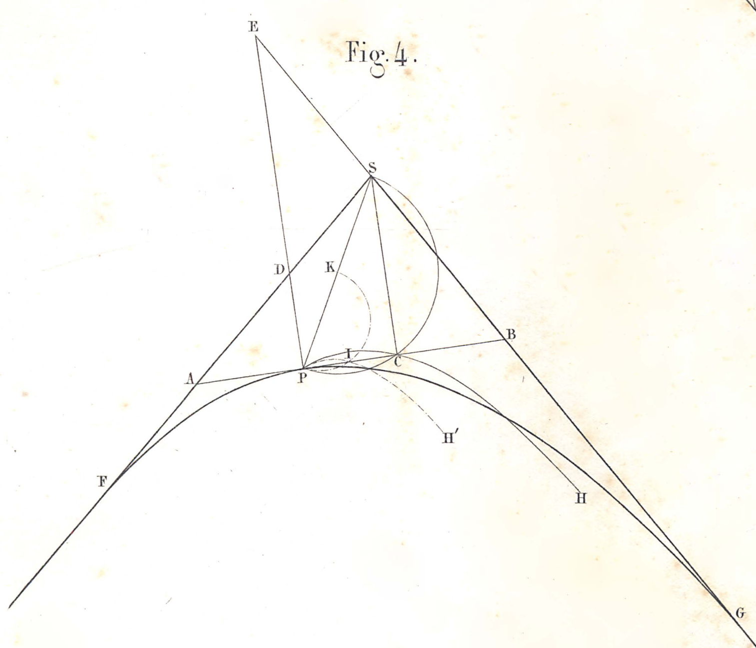


Fig. 4.



Lemaitre sc.

Fig. 5.

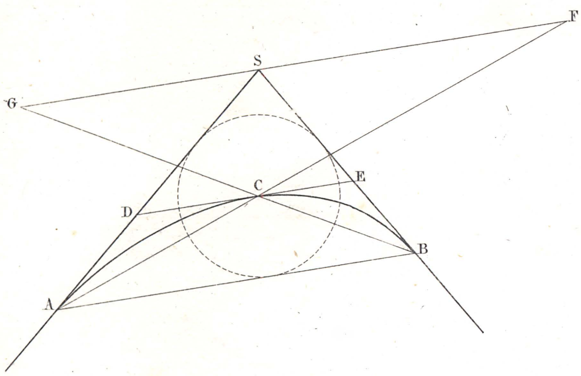


Fig. 6.

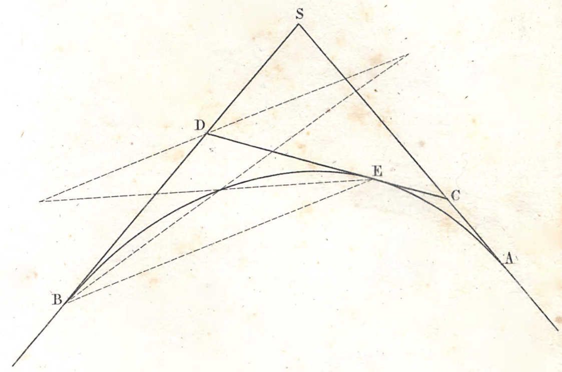
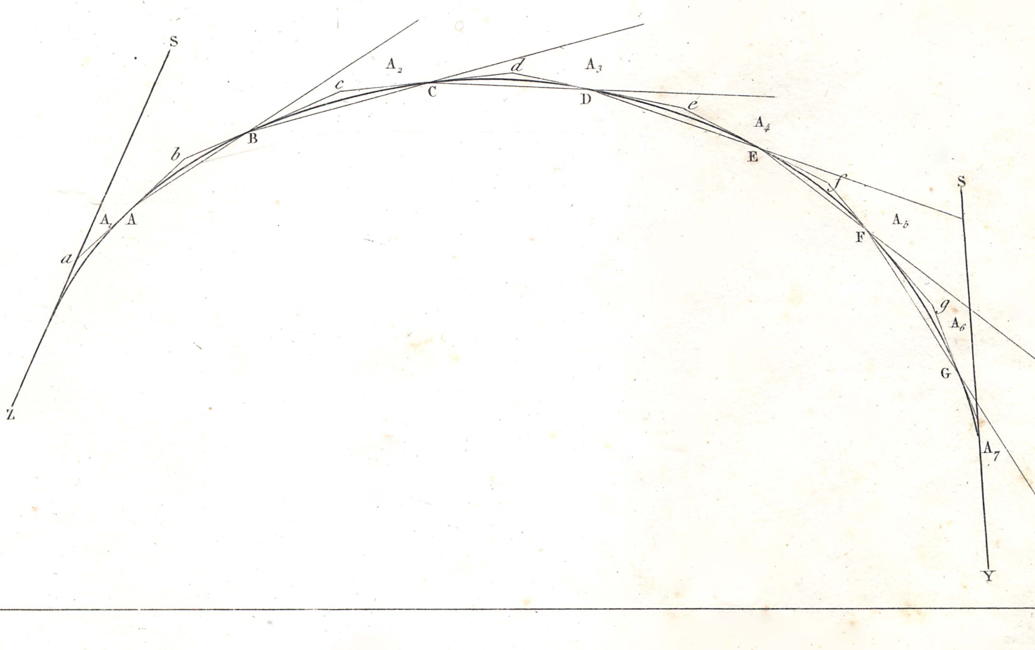


Fig. 7.



Lemaître sc.

Fig. 8.

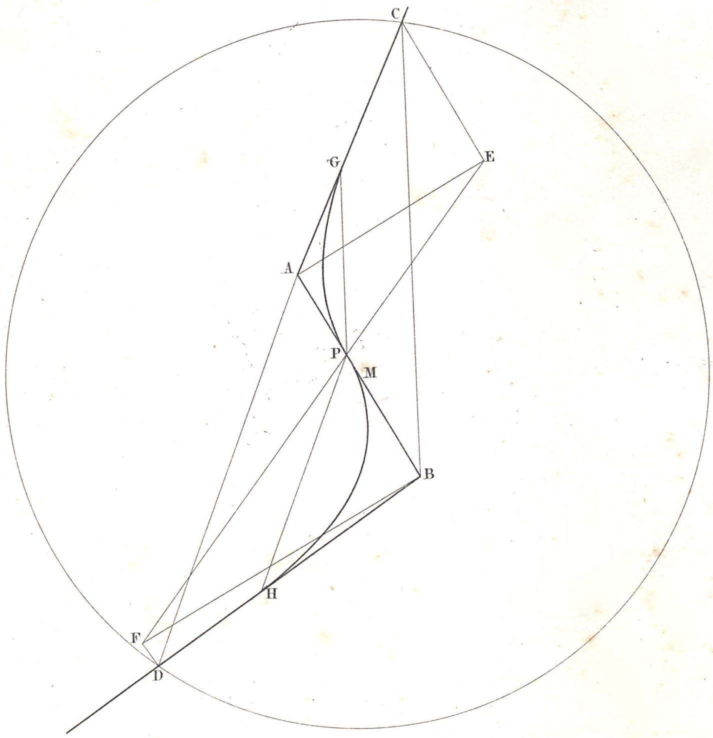
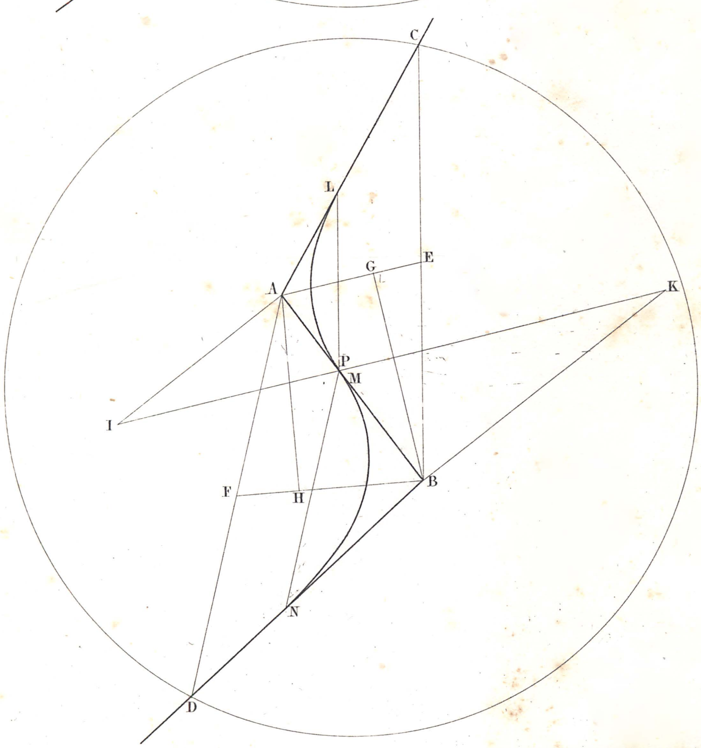


Fig. 9.



Lemaitre sc.

Fig. 10.

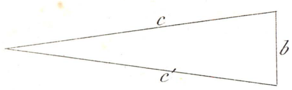


Fig. 12.

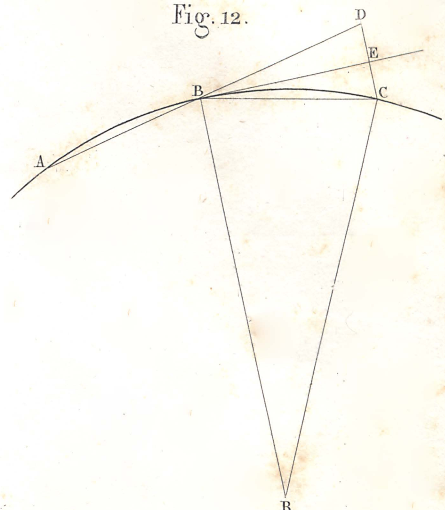


Fig. 11.

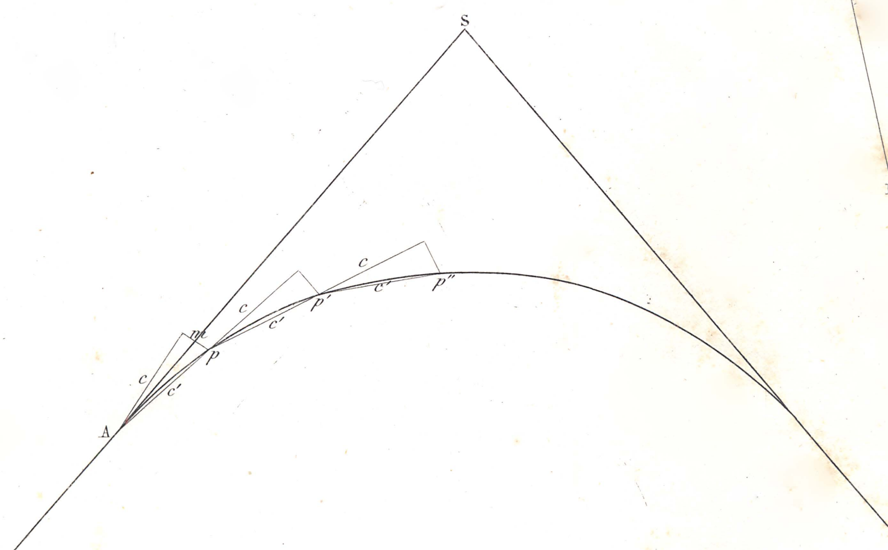
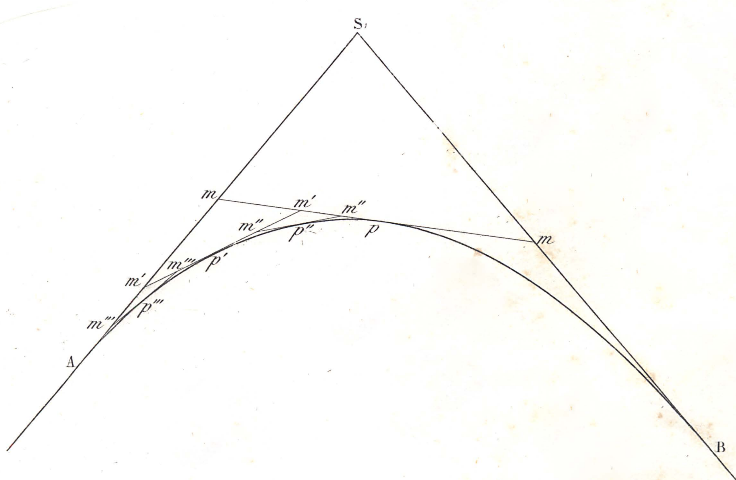


Fig. 13.



Lemaitre sc.

Fig. 14.

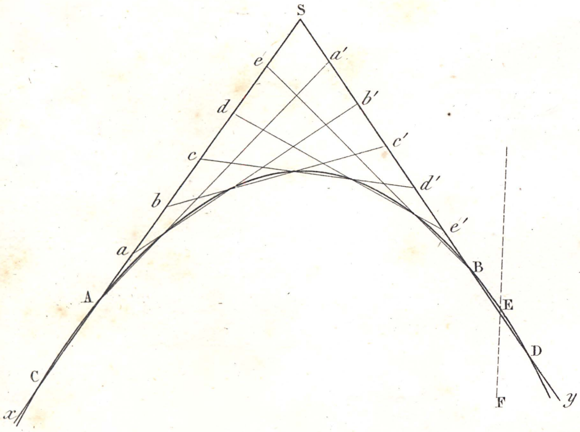


Fig. 15.

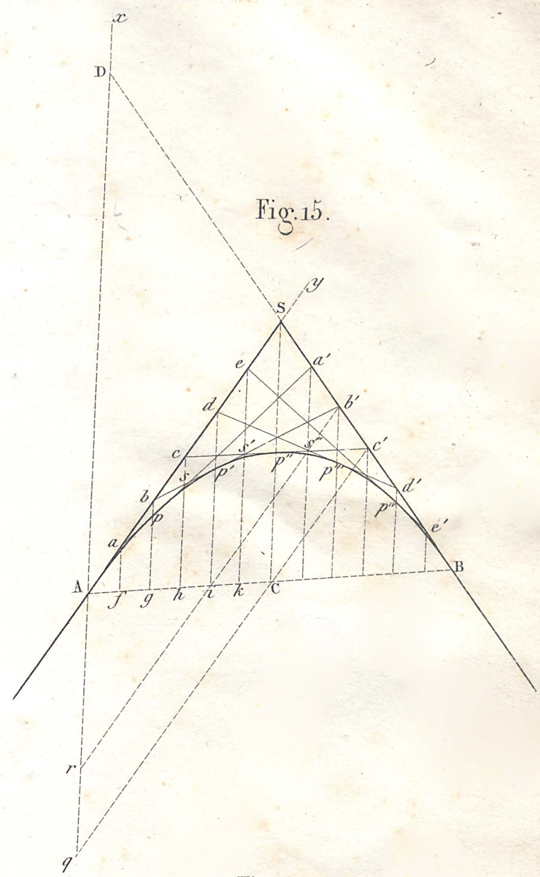


Fig. 16.

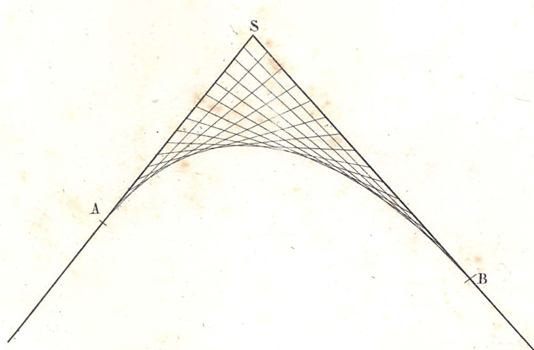
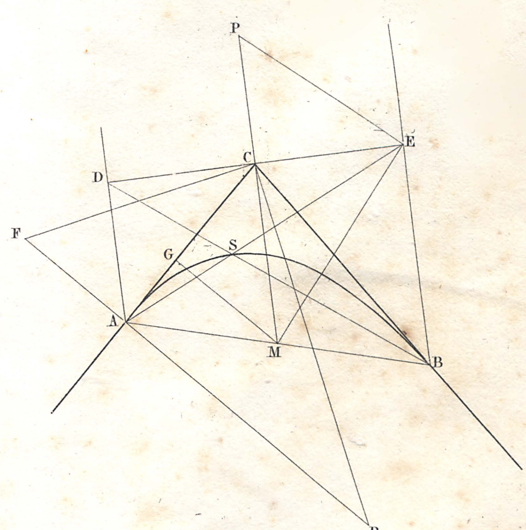


Fig. 17.



Lemaitre sc.