Wielmożnemu Doktorowi
Szujskiemu Sekretarzowi
Jeneralnemu
Akademii Umiejętności w
Krakowie, &. &.

PRINCIPES FONDAMENTAUX

DU

CALCUL TRANSCENDANT,

w Dowód Szacunku
Autor.
Tetmayer

Par J. TETMAYER DE PRZERWA.

PARIS,
MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Augustins, 55.

1857.

PRINCIPES FONDAMENTAUX

DU

CALCUL TRANSCENDANT,

PAR J. TETMAYER DE PRZERWA.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Augustins, 55.

1857.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

PRÉFACE.

Le calcul transcendant, dont j'indique les principes fondamentaux, résout définitivement le problème d'une méthode infinitésimale rigoureuse.

Aussi la quantité infiniment petite au moyen de laquelle s'effectue ce calcul est-elle essentiellement différente de celle que nous a léguée Leibnitz.

D'abord elle n'est pas une hypothèse. Car je la tire, avec sa valeur, de l'expression d'une quantité continue.

En second lieu, sa valeur seule détermine les résultats ; de sorte que ces derniers ne dépendent d'aucuns raisonnements subsidiaires plus ou moins fondés.

Et cependant les opérations particulières auxquelles elle donne lieu ne sont pas moins simples que celles qui forment la méthode de Leibnitz.

Les effets analytiques que produit l'application de cette quantité infiniment petite ne laissent d'ailleurs rien à désirer.

Elle décompose l'expression d'une quantité continue en ses éléments qui définissent rigoureusement les éléments correspondants de cette quantité.

Elle fournit aussi les éléments analytiques d'une quantité dont l'expression immédiate n'est pas donnée et qu'on obtient ensuite en effectuant la sommation *ordinaire* de ces éléments.

On conçoit qu'un tel résultat doit jeter une clarté soudaine sur toutes les questions de l'analyse infinitésimale. Il y a plus : il peut évidemment servir de principe suprême à une nouvelle et très-simple théorie des fonctions continues, théorie destinée à remplacer les calculs dits *différentiel* et *intégral*, qui forment actuellement un lourd assemblage de considérations incohérentes. Mais, par des raisons toutes personnelles, j'ai dû me borner ici à établir l'existence du calcul transcendant et son interprétation géométrique.

En apportant l'explication définitive de la quantité infiniment petite, dont on parle depuis 1684 sans avoir une seule fois prouvé qu'elle existe ou qu'elle n'existe pas, ou précisé d'une manière quelconque sa signification analytique, je dois remplir un devoir que m'impose ma conviction intime.

Je le déclare formellement : je n'attribue pas à la force de ma tête ce succès de mes recherches. J'espère même qu'à cet égard on ne soupçonnera pas la sincérité de ma parole. Car, certes, lorsqu'on aura parcouru ces pages, loin d'être étonné du génie de l'auteur, on se demandera comment une chose aussi simple et aussi palpable a pu pendant deux siècles environ se dérober constamment à l'attention des plus grands penseurs.

Concluons-en humblement que les découvertes, quelle que soit leur importance, ne viennent pas au commandement de l'homme, mais à l'heure marquée par la Providence. Ce qui explique ce phénomène observé plus d'une fois, que le premier rayon d'une vérité est parti du côté d'où l'on s'attendait le moins à le voir venir.

Paris, le 3 mai 1857.

PRINCIPES FONDAMENTAUX

DU

CALCUL TRANSCENDANT.

§ I. — GÉNÉRATION DIRECTE DES QUANTITÉS CONTINUES.

LEMME GÉNÉRAL.

1. La série

$$1+1+1+\ldots$$

n'a pas de limite. Lors donc qu'on pose

$$1+1+1+\ldots=\infty,$$

le symbole

$$\infty$$

représente la série

$$1+1+1+\ldots,$$

et ne désigne rien de plus.

Mais le rapport

$$\frac{1}{1+1+1+\ldots}=\frac{1}{\infty},$$

dont le numérateur demeure constant, tandis que le dénominateur croît au delà de toute valeur assignable, tend vers la limite o.

On appelle *infiniment grande* la quantité

$$1+1+1+\ldots=\infty;$$

et, en conséquence, celle

$$\frac{1}{1+1+1+\ldots}=\frac{1}{\infty}$$

prendra la dénomination de quantité *infiniment petite.*

2. Quand on écrit

$$1+1+1+\ldots=\infty,$$

pour exprimer ainsi un nombre qui croît uniformément et indéfiniment, la signification du symbole

$$\infty$$

est donnée par hypothèse ; et il n'est plus permis de l'altérer dans le cours du calcul par la substitution d'une quantité qui fournit également la série

$$1+1+1+\ldots,$$

mais qui n'offre pas le même sens. Et c'est ce qui arriverait certainement si l'on mettait

$$\frac{1}{0}$$

à la place de ∞, en se fondant sur ce que

$$\frac{1}{0}=\frac{1}{1-1}=1+1+1+\ldots;$$

parce que

$$\frac{1}{0}$$

est un brusque passage d'une valeur finie à l'infini.

3. Cherchons donc à constater par la considération directe de la série

$$1+1+1+\ldots$$

les propriétés particulières que manifeste, dans le calcul, la quantité ∞.

Soient

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,$$
$$A,\quad B,\quad C,\ldots$$

des quantités finies positives. Désignons par S_n les n premiers termes de la série

$$1 + 1 + 1 + \ldots,$$

et par R_n tous ceux qui les suivent. Nous aurons

$$S_n + R_n = 1 + 1 + 1 + \ldots,$$

et de même

$$R_n = 1 + 1 + 1 + \ldots;$$

de sorte qu'en substituant, on obtient

$$S_n + 1 + 1 + 1 + \ldots = 1 + 1 + 1 + \ldots.$$

Mais on peut toujours supposer

$$S_n > A,$$

quelque grand que soit A. On aura donc aussi

$$A + 1 + 1 + 1 + \ldots = 1 + 1 + 1 + \ldots,$$

et, par suite,

$$1 + 1 + 1 + \ldots = 1 + 1 + 1 + \ldots - A;$$

ce qu'on peut indiquer par

$$\infty \pm A = \infty.$$

De là on conclut

$$A\infty^{\alpha+\beta} \pm B\infty^{\alpha} = \infty^{\alpha}(A\infty^{\beta} \pm B) = A\infty^{\alpha+\beta},$$

et généralement

$$A\infty^{\alpha} \pm B\infty^{\alpha-\beta} \pm C\infty^{\alpha-\beta-\gamma} \pm \ldots = A\infty^{\alpha}.$$

4. Nous pouvons maintenant nous assurer que les deux infinis

$$\infty, \quad \frac{1}{0},$$

sont essentiellement différents. En effet, celui

$$1 + 1 + 1 + \ldots = \infty,$$

vient de la série

$$1 + 1 + 1 + \ldots n^{o},$$

qui est fonction de l'indice n et un cas de celle-ci :

$$1 + m + \frac{m(m+1)}{1.2} + \ldots \frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2\ldots(n-1)},$$

cas qui répond à $m = 1$. Or, lorsque m est un nombre entier, cette dernière représente les séries directes des nombres figurés ; et son terme général prend la forme

$$\frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1.2\ldots(m-1)},$$

ce qui donne

$$\mathrm{S}_n \frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1.2\ldots(m-1)} = \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2\ldots m},$$

et pour $n = \infty$,

$$\mathrm{S}_\infty \frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1.2\ldots(m-1)} = \frac{\infty^m}{1.2\ldots m}.$$

De sorte qu'on a ici

$$1 + m + \frac{m(m+1)}{1.2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} + \ldots = \frac{\infty^m}{1.2\ldots m};$$

tandis qu'on trouve

$$1 + m + \frac{m(m+1)}{1.2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} + \ldots = \frac{1}{0^m},$$

en supposant $x = 1$ dans le développement

$$\frac{1}{(1-x)^m} = 1 + mx + \frac{m(m+1)}{1.2}x^2 + \ldots.$$

Donc : 1°.

$$\frac{1}{0}$$

n'exprime pas ce que nous désignons par le symbole ∞ ;

2°. Les équations

$$1 + 1 + 1 + \ldots = \infty,$$

$$1 + 1 + 1 + \ldots = \frac{1}{1 - 1},$$

n'entraînent pas la suivante :

$$\infty = \frac{1}{0};$$

3°. On ne peut mettre

$$\frac{1}{0}$$

à la place de ∞, pour déterminer la valeur d'une expression qui contient l'infini ∞.

5. En ce qui concerne la quantité infiniment petite

$$\frac{A}{\infty^{\alpha}},$$

il est clair qu'on aura, par ce qui précède,

$$B \pm \frac{A}{\infty^{\alpha}} = \frac{B\infty^{\alpha} \pm A}{\infty^{\alpha}} = B,$$

$$\frac{A}{\infty^{\alpha}} \pm \frac{B}{\infty^{\alpha+\beta}} \pm \frac{C}{\infty^{\alpha+\beta+\gamma}} \pm \ldots = \frac{A}{\infty^{\alpha}}.$$

Mais il importe d'observer que, de l'équation

$$B \pm \frac{A}{\infty^{\alpha}} = B,$$

il ne résulte aucunement que la valeur absolue de la quantité

$$\frac{A}{\infty^{\alpha}}$$

soit nulle ; car on voit que $\frac{A}{\infty^{\alpha}}$ disparaît dans le binôme

$$B \pm \frac{A}{\infty^{\alpha}},$$

parce que $B\infty^{\alpha}$ annule la quantité *finie* A dans le numérateur de la fraction

$$\frac{B\infty^{\alpha} \pm A}{\infty^{\alpha}}.$$

6. La série

$$B + \frac{C}{\infty} + \frac{C}{\infty} + \frac{C}{\infty} + \ldots$$

mérite encore une attention particulière.

D'abord elle n'admet aucune réduction. On ne peut y supprimer tous les termes infiniment petits

$$\frac{C}{\infty} + \frac{C}{\infty} + \frac{C}{\infty} + \ldots = C,$$

parce que B n'annule pas C; et quand on en efface un nombre fini aussi grand que l'on veut, il reste toujours

$$B + \frac{C}{\infty} + \frac{C}{\infty} + \ldots.$$

La raison en est fort simple. La règle

$$B + \frac{C}{\infty} = B$$

est fondée sur ce que la quantité $\frac{C}{\infty}$ jointe à celle B ne change pas la valeur de cette dernière. Donc, du moment qu'il n'en est pas ainsi, c'est-à-dire que

$$B + \frac{C}{\infty} + \frac{C}{\infty} + \ldots = B + C,$$

cette règle cesse d'être applicable.

D'où résulte cette conséquence bien remarquable que, dans la série

$$B + \frac{C}{\infty} + \frac{C}{\infty} + \ldots,$$

on a les relations

$$B + \frac{C}{\infty} > B,$$

$$B + \frac{C}{\infty} + \frac{C}{\infty} > B + \frac{C}{\infty},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

qui, en dehors de cette série, ne subsistent pas; et que, par conséquent, les quantités infiniment petites

$$\frac{C}{\infty}, \frac{C}{\infty}, \frac{C}{\infty}, \ldots$$

prennent ici le caractère analytique des quantités finies.

Concluons qu'il en sera de même de toute expression formée exclusivement de quantités finies et de séries telles que

$$\frac{C}{\infty} + \frac{C}{\infty} + \ldots = C.$$

7. DÉFINITION. — Nous nommerons *élément* toute quantité infiniment petite qui concourt effectivement à former une quantité finie ou une quantité infiniment petite d'un ordre moins élevé.

THÉORÈME I.

8. *Soit*

$$\theta = x$$

une quantité continue géométrique; et désignons par

$$\zeta$$

la limite de θ, qui se meut lorsque cette quantité varie.

Quand on représente par

$$\begin{aligned} &x, \\ &x + dx, \\ &x + dx + dx, \\ &\vdots \\ &x + \Delta x \end{aligned}$$

les valeurs que prend successivement la quantité θ lorsque, en croissant uniformément et par degrés insensibles, elle devient

$$\theta_1 = x + \Delta x,$$

le symbole

$$dx$$

exprime l'élément

$$\frac{\Delta x}{\infty};$$

et, aux quantités infiniment petites

$$dx, \quad dx, \quad dx, \ldots,$$

répondent les positions successives de la limite ζ, *qui forment les éléments géométriques de l'accroissement*

$$\theta_1 - \theta.$$

DÉMONSTRATION. — Lorsque la quantité

$$\theta = x,$$

en croissant par degrés insensibles, devient

$$\theta_1 = x + \Delta x,$$

il est certain qu'elle acquiert successivement toutes les valeurs intermédiaires comprises entre x et $x + \Delta x$.

Donc si

$$\begin{gathered} x + dx, \\ x + dx + dx, \\ \vdots \end{gathered}$$

sont ces valeurs,

$$x + dx$$

succède immédiatement à

$$x;$$

ce qui exige que dx converge indéfiniment vers 0.

Or, la quantité dx est contenue un certain nombre de fois dans Δx. Donc elle doit s'y trouver

$$1 + 1 + 1 + \ldots$$

fois, afin que la relation

$$\Delta x = dx\,(1 + 1 + 1 + \ldots)$$

fournisse pour dx la valeur

$$dx = \frac{\Delta x}{1 + 1 + 1 + \ldots}$$

tendant vers o (**1**). Donc le symbole dx désigne l'élément

$$\frac{\Delta x}{\infty}.$$

Mais, s'il n'existe aucun état de θ, qui tombe entre

$$x$$

et

$$x + dx,$$

ou entre

$$x + dx$$

et

$$x + dx + dx,$$

etc., il est évident que les limites formant les extrémités respectives des états

$$\begin{array}{l} x, \\ x + dx, \\ x + dx + dx, \\ \vdots \\ \vdots \end{array}$$

de la quantité θ, se succèdent sans intervalles.

Donc elles résultent du mouvement continu de la limite ζ dont chaque position répond à un accroissement infiniment petit

$$dx$$

de l'état précédent de θ, et forme ainsi un élément géométrique de

$$\theta_1 - \theta.$$

Donc, etc.

9. SCOLIE I. — Dans notre calcul, l'infini

$$1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$$

résulte de la continuité.

10. SCOLIE II. — On observera que les positions successives de la limite ζ ne sont pas des parties très-petites de

$$\theta_1 - \theta,$$

et que, par conséquent, elles offrent le véritable caractère d'*éléments* de cette quantité.

11. SCOLIE III. — De même qu'on ne peut déterminer les positions successives de la limite ζ par la simple division de la quantité $\theta_1 - \theta$, on n'obtient pas non plus leurs valeurs

$$\frac{\Delta x}{\infty}, \quad \frac{\Delta x}{\infty}, \quad \frac{\Delta x}{\infty}, \ldots$$

en divisant Δx par la série

$$1 + 1 + 1 + \ldots.$$

Car cette opération donne (*)

$$\Delta x (1 - 1) = 0;$$

tandis que nous trouvons

$$x + \frac{\Delta x}{\infty} + \frac{\Delta x}{\infty} + \ldots = x + \Delta x;$$

(*) Comme on peut avoir

$$1 + 1 + 1 + \ldots = \infty,$$

ou

$$1 + 1 + 1 + \ldots = \frac{1}{1 - 1},$$

l'expression

$$\frac{1}{1 + 1 + 1 + \ldots}$$

comporte aussi une double signification; et il faut bien que, dans le cas

$$1 + 1 + 1 + \ldots = \frac{1}{1 - 1},$$

le dividende divisé par le quotient reproduise le diviseur

$$1 - 1.$$

et il est évident qu'une négation absolue, répétée même un nombre infini de fois, ne saurait produire un accroissement de x.

Il y a donc lieu de considérer comme appartenant exclusivement aux phénomènes de la continuité, les unes et les autres des quantités infiniment petites ci-dessus.

12. Corollaire. — Désignons par

$$\begin{array}{l} x, \\ x + dx_1, \\ x + dx_1 + dx_2, \\ \vdots \\ x + dx_1 + dx_2 + \ldots dx_\infty \end{array}$$

les valeurs que prend la quantité

$$\theta = x$$

quand, en croissant, elle devient

$$\theta_1 = x + \Delta x.$$

Comme

$$x + dx_1 > x,$$

il est clair que

$$dx_1$$

est le premier accroissement infiniment petit de x (**6**).

D'où il suit :

1°. Que la position primitive de la limite ζ, qui forme l'extrémité de la quantité

$$\theta = x$$

et l'origine de son accroissement

$$\theta_1 - \theta = \Delta x,$$

n'entre pas, comme premier élément de Δx, dans les expressions

$$x + dx_1 + dx_2 + \ldots dx_\infty = x + \Delta x,$$
$$dx_1 + dx_2 + \ldots dx_\infty = \Delta x;$$

2°. Que, par conséquent, les éléments

$$dx_1,\quad dx_2,\quad dx_3,\ldots,\quad dx_\infty$$

représentent les positions de ζ qui résultent du mouvement de cette limite; de sorte que

$$dx_\infty$$

exprime à la fois le dernier accroissement de x et la dernière position de ζ, qui détermine l'état définitif de la quantité

$$\theta_1 = x + \Delta x.$$

Ce qui fournit une règle générale pour les applications ultérieures de notre calcul.

13. Définitions. — La limite ζ est la *génératrice géométrique* de la quantité

$$\theta_1 - \theta;$$

et lorsqu'on attribue la valeur dx à sa position, qui détermine l'état primitif de θ,

$$dx$$

est une formule qui prend la dénomination de *génératrice analytique*, parce qu'elle donne les éléments

$$dx_1,\quad dx_2,\ldots,\quad dx_\infty$$

de l'accroissement Δx.

Considéré par rapport à son effet, le mouvement de la limite ζ est dit *génération*.

THÉORÈME II.

14. Soit

$$\Theta = \mathrm{F}(x)$$

une quantité continue géométrique.

Supposons de plus que, x venant à croître, la limite λ de la quantité Θ se meuve; et représentons par

$$\mathrm{F}'(x)$$

une fonction de x dérivée, suivant une certaine loi, de la fonction donnée

$$F(x).$$

Si la quantité

$$\Theta = F(x),$$

devenant

$$\Theta_1 = F(x + \Delta x),$$

varie par degrés insensibles, les éléments de l'accroissement

$$\Theta_1 - \Theta = F(x + \Delta x) - F(x)$$

procéderont comme il suit :

$$F'(x + dx)\,dx, \quad F'(x + 2\,dx)\,dx, \ldots, \quad F'(x + ndx)\,dx, \ldots;$$

et l'on aura

$$\mathbf{S}_\infty F'(x + ndx)dx = F'(x)\Delta x + \frac{F''(x)\Delta x^2}{1.2} + \ldots$$

Démonstration. — La génératrice géométrique de l'accroissement

$$\Theta_1 - \Theta = F(x + \Delta x) - F(x)$$

est la limite

$$\lambda$$

formant l'extrémité de la quantité

$$\Theta = F(x).$$

Son expression analytique sera, par conséquent, fonction de la première des valeurs

$$x,$$
$$x + dx,$$
$$x + dx + dx,$$

de la quantité croissante x; et, comme elle doit fournir des éléments qui s'annulent avec Δx, il faut qu'elle soit de la forme

$$F'(x)\,dx,$$

$F'(x)$ désignant une fonction de x dérivée de la fonction donnée $F(x)$.

En conséquence, le premier accroissement infiniment petit de la quantité

$$\Theta = F(x)$$

sera (**12**)

$$F'(x+dx)\,dx\ (*),$$

(*) Nous trouvons que le premier accroissement infiniment petit de la quantité

$$\Theta = F(x)$$

a pour expression

$$F'(x+dx)\,dx.$$

Cependant on le représente ordinairement par la génératrice

$$F'(x)\,dx,$$

ce qui n'est pas indifférent. Car admettons :

1°. Qu'on ait réellement

$$F(x+dx) = F(x) + F'(x)\,dx,$$

ce qui entraînerait

$$F'(x+dx)\,dx = F'(x)\,dx + F''(x)\,dx^2;$$

2°. Que les deux premières dérivées

$$F'(x),\quad F''(x)$$

de la fonction $F(x)$ s'annulent pour $x = a$.

Il est évident que, a s'accroissant de da, la quantité

$$F'(a)\,da = 0$$

deviendra

$$F'(a+da)\,da \gtrless 0;$$

tandis que, à cause de

$$F'(a) = 0,\quad F''(a) = 0,$$

la formule ci-dessus donne

$$F'(a+da)\,da = 0.$$

D'où l'on voit que, prenant pour axiome fondamental l'équation

$$F(x+dx) = F(x) + F'(x)\,dx,$$

on se met gratuitement dans l'impossibilité d'arriver à une méthode rigoureuse de calcul infinitésimal.

le second

$$F'(x+2\,dx)\,dx,$$

etc.; de sorte que les éléments de $\Theta_1 - \Theta$ offriront la série

$$F'(x+dx)\,dx + F'(x+2\,dx)\,dx + \ldots F'(x+ndx)\,dx + \ldots.$$

Or, puisque

$$F(x+dx) = F(x) + F'(x+dx)\,dx,$$

on aura :

1°.

$$\begin{aligned} F'(x+dx)\,dx &= F'(x)\,dx + F''(x+dx)\,dx^2 \\ &= F'(x)\,dx + F''(x)\,dx^2 + F'''(x)\,dx^3 + F^{\text{IV}}(x)\,dx^4 + \ldots; \end{aligned}$$

2°.

$$F'(x+2\,dx)\,dx = F'(x+dx)\,dx + F''(x+dx)\,dx^2 + F'''(x+dx)\,dx^3 + \ldots.$$

Mais

$$\begin{aligned} F'(x+dx)\,dx &= F'(x)\,dx + F''(x)\,dx^2 + F'''(x)\,dx^3 + F^{\text{IV}}(x)\,dx^4 + \ldots, \\ F''(x+dx)\,dx^2 &= F''(x)\,dx^2 + F'''(x)\,dx^3 + F^{\text{IV}}(x)\,dx^4 + \ldots, \\ F'''(x+dx)\,dx^3 &= F'''(x)\,dx^3 + F^{\text{IV}}(x)\,dx^4 + \ldots, \\ F^{\text{IV}}(x+dx)\,dx^4 &= F^{\text{IV}}(x)\,dx^4 + \ldots, \\ \ldots\ldots &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

donc

$$F'(x+2\,dx)\,dx = F'(x)\,dx + 2\,F''(x)\,dx^2 + 3\,F'''(x)\,dx^3 + 4\,F^{\text{IV}}(x)\,dx^4 + \ldots.$$

Et l'on trouve ainsi

$$\begin{aligned} F'(x+3\,dx)\,dx &= F'(x)\,dx + 3\,F''(x)\,dx^2 + 6\,F'''(x)\,dx^3 + 10\,F^{\text{IV}}(x)\,dx^4 + \ldots, \\ F'(x+4\,dx)\,dx &= F'(x)\,dx + 4\,F''(x)\,dx^2 + 10\,F'''(x)\,dx^3 + 20\,F^{\text{IV}}(x)\,dx^4 + \ldots; \end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$F'(x+ndx)\,dx = F'(x)\,dx + n\,F''(x)\,dx^2 + \frac{n(n+1)}{1.2}\,F'''(x)\,dx^3 + \ldots.$$

La somme des n premiers termes de la série que nous considérons sera donc

$$\mathbf{S}_n \mathrm{F}'(x+ndx)\,dx = n\,\mathrm{F}'(x)\,dx + \frac{n(n+1)}{1.2}\mathrm{F}''(x)\,dx^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\mathrm{F}'''(x)\,dx^3 + \ldots;$$

et, lorsqu'on y remplace n par ∞, et dx par $\frac{\Delta x}{\infty}$, il vient (3)

$$\mathbf{S}_\infty \mathrm{F}'(x+ndx)\,dx = \mathrm{F}'(x)\,\Delta x + \frac{\mathrm{F}''(x)\,\Delta x^2}{1.2} + \frac{\mathrm{F}'''(x)\,\Delta x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Donc, etc.

15. Corollaire I. — Pour établir avec leurs restes les séries ci-dessus, reprenons l'équation

$$\mathrm{F}(x+dx) = \mathrm{F}(x) + \mathrm{F}'(x+dx)\,dx.$$

On en conclut :

1°.

$$\mathrm{F}'(x+dx)\,dx = \mathrm{F}'(x)\,dx + \mathrm{F}''(x+dx)\,dx^2;$$

2°.

$$\mathrm{F}'(x+2dx)\,dx = \mathrm{F}'(x+dx)\,dx + \mathrm{F}''(x+2dx)\,dx^2$$
$$= \mathrm{F}'(x)\,dx + \left\{\begin{array}{l}\mathrm{F}''(x+dx)\,dx^2\\ +\mathrm{F}''(x+2dx)\,dx^2;\end{array}\right.$$

3°.

$$\mathrm{F}'(x+3dx)\,dx = \mathrm{F}'(x+dx)\,dx + \left\{\begin{array}{l}\mathrm{F}''(x+2dx)\,dx^2\\ +\mathrm{F}''(x+3dx)\,dx^2\end{array}\right.$$
$$= \mathrm{F}'(x)\,dx + \left\{\begin{array}{l}\mathrm{F}''(x+dx)\,dx^2\\ +\mathrm{F}''(x+2dx)\,dx^2\\ +\mathrm{F}''(x+3dx)\,dx^2;\end{array}\right.$$

etc. On aura donc généralement

$$\mathrm{F}'(x+ndx)\,dx = \mathrm{F}'(x)\,dx + \left\{\begin{array}{l}\mathrm{F}''(x+dx)\,dx^2\\ +\mathrm{F}''(x+2dx)\,dx^2\\ +\mathrm{F}''(x+3dx)\,dx^2\\ \quad\vdots\\ +\mathrm{F}''(x+ndx)\,dx^2;\end{array}\right.$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{F}'(x+ndx)\,dx = \mathrm{F}'(x)\,dx + \mathbf{S}_n \mathrm{F}''(x+ndx)\,dx^2.$$

Or, par la même raison,

$$F''(x+ndx)\,dx^2 = F''(x)\,dx^2 + \mathbf{S}_n F'''(x+ndx)\,dx^3,$$

$$F'''(x+ndx)\,dx^3 = F'''(x)\,dx^3 + \mathbf{S}_n F^{\text{IV}}(x+ndx)\,dx^4,$$

. . . .

$$F^{(m-1)}(x+ndx)\,dx^{m-1} = F^{(m-1)}(x)\,dx^{m-1} + \mathbf{S}_n F^{(m)}(x+ndx)\,dx^m;$$

et lorsque, dans

$$F'(x+ndx)\,dx = F'(x)\,dx + \mathbf{S}_n F''(x+ndx)\,dx^2,$$

on remplace

$$F''(x+ndx)\,dx^2$$

par

$$F''(x)\,dx^2 + \mathbf{S}_n F'''(x+ndx)\,dx^3,$$

puis

$$F'''(x+ndx)\,dx^3$$

par

$$F'''(x)\,dx^3 + \mathbf{S}_n F^{\text{IV}}(x+ndx)\,dx^4,$$

etc., on obtient successivement

$$F'(x+ndx)\,dx = F'(x)\,dx + \mathbf{S}_n F''(x)\,dx^2 + \mathbf{S}_n \mathbf{S}_n F'''(x+ndx)\,dx^3,$$

$$F'(x+ndx)\,dx = F'(x)\,dx + \mathbf{S}_n F''(x)\,dx^2 + \mathbf{S}_n \mathbf{S}_n F'''(x)\,dx^3 + \mathbf{S}_n \mathbf{S}_n \mathbf{S}_n F^{\text{IV}}(x+ndx)\,dx^4,$$

. . . .

$$F'(x+ndx)\,dx = F'(x)\,dx + \mathbf{S}_n F''(x)\,dx^2 + \mathbf{S}_n \mathbf{S}_n F'''(x)\,dx^3 + \ldots + \mathbf{S}_n^{m-2} F^{(m-1)}(x)\,dx^{m-1} + \mathbf{S}_n^{m-1} F^{(m)}(x+ndx)\,dx^m.$$

Maintenant on a

$$\mathrm{S}_n \mathrm{F}''(x)\,dx^2 = n\,\mathrm{F}''(x)\,dx^2,$$

$$\mathrm{S}_n \mathrm{S}_n \mathrm{F}'''(x)\,dx^3 = \mathrm{S}_n\, n\,\mathrm{F}'''(x)\,dx^3$$

$$= \frac{n(n+1)}{1.2}\mathrm{F}'''(x)\,dx^3,$$

. . . .

$$\mathrm{S}_n^{m-2} \mathrm{F}^{(m-1)}(x)\,dx^{m-1} = \mathrm{S}_n^{m-3}\, n\,\mathrm{F}^{(m-1)}(x)\,dx^{m-1}$$

$$= \mathrm{S}_n^{m-4} \frac{n(n+1)}{1.2}\mathrm{F}^{(m-1)}(x)\,dx^{m-1}$$

. . . .

$$= \frac{n(n+1)\ldots(n+m-3)}{1.2\ldots(m-2)}\mathrm{F}^{(m-1)}(x)\,dx^{m-1}.$$

Donc

$$\mathrm{F}'(x+ndx)\,dx = \mathrm{F}'(x)\,dx + n\,\mathrm{F}''(x)\,dx^2 + \ldots \frac{n(n+1)\ldots(n+m-3)}{1.2\ldots(m-2)}\mathrm{F}^{(m-1)}(x)\,dx^{m-1}$$
$$+ \mathrm{S}_n^{m-1} \mathrm{F}^{(m)}(x+ndx)\,dx^m;$$

puis

$$\mathrm{S}_n \mathrm{F}'(x+ndx)\,dx = n\,\mathrm{F}'(x)\,dx + \frac{n(n+1)}{1.2}\mathrm{F}''(x)\,dx^2 + \ldots \frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1.2\ldots(m-1)}\mathrm{F}^{(m-1)}(x)\,dx^{m-1}$$
$$+ \mathrm{S}_n^{m} \mathrm{F}^{(m)}(x+ndx)\,dx^m;$$

enfin

$$\mathrm{S}_\infty \mathrm{F}'(x+ndx)\,dx = \mathrm{F}'(x)\,\Delta x + \frac{\mathrm{F}''(x)\,\Delta x^2}{1.2} + \ldots \frac{\mathrm{F}^{(m-1)}(x)\,\Delta x^{m-1}}{1.2\ .\ (m-1)}$$
$$+ \mathrm{S}_\infty^{m} \mathrm{F}^{(m)}(x+ndx)\,dx^m\ (*),$$

où

$$\mathrm{S}_\infty^{m} \mathrm{F}^{(m)}(x+ndx)\,dx^m$$

(*) Pour plus de simplicité, nous désignerons toujours par S_p^m la somme $\mathrm{S}_p \mathrm{S}_n^{m-1}$.

tombe évidemment entre

$$\mathop{\mathrm{S}}_{\infty}^{m} \mathrm{F}^{(m)}(x)\,dx^m = \frac{\mathrm{F}^{(m)}(x)\,\Delta x^m}{1.2.\ .m}$$

et

$$\mathop{\mathrm{S}}_{\infty}^{m} \mathrm{F}^{(m)}(x+\Delta x)\,dx^m = \frac{\mathrm{F}^{(m)}(x+\Delta x)\,\Delta x^m}{1.2\ldots m}.$$

16. Corollaire II. — Lorsque toutes les dérivées de la fonction $\mathrm{F}(x)$ sont finies ou qu'on les suppose telles, les termes infiniment petits de la série

$$\mathrm{F}(x+\Delta x) - \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}'(x+dx)\,dx + \mathrm{F}'(x+2\,dx)\,dx + \ldots,$$

ont le caractère analytique des quantités finies.

Pour s'en assurer, il suffit de faire

$$n = 1 + 1 + 1 + \ldots,$$

dans le terme sommatoire

$$\begin{aligned}\mathop{\mathrm{S}}_{n} \mathrm{F}'(x+ndx)\,dx = n\,\mathrm{F}'(x)\,dx + \frac{n(n+1)}{1.2}\mathrm{F}''(x)\,dx^2 + \ldots \\ + \frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1.2\ldots(m-1)}\mathrm{F}^{(m-1)}(x)\,dx^{m-1} + \mathop{\mathrm{S}}_{n}^{m}\mathrm{F}^{(m)}(x+ndx)\,dx^m,\end{aligned}$$

et d'écrire le résultat comme il suit :

$$\begin{aligned}\mathop{\mathrm{S}}_{\infty} \mathrm{F}'(x+ndx)\,dx = \mathrm{F}'(x)(dx+dx+\ldots) + \frac{\mathrm{F}''(x)}{1.2}(dx+dx+\ldots)^2 + \ldots \\ + \frac{\mathrm{F}^{(m-1)}}{1.2\ldots(m-1)}(dx+dx+\ldots)^{m-1} + \mathop{\mathrm{S}}_{\infty}^{m}\mathrm{F}^{(m)}(x+ndx)\,dx^m;\end{aligned}$$

ce qui fait voir que la série

$$\mathrm{F}(x+\Delta x) - \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}'(x+dx)\,dx + \mathrm{F}'(x+2\,dx)\,dx + \ldots$$

ne contient que des quantités finies et la suite irréductible (**6**)

$$dx + dx + dx + \ldots = \Delta x.$$

Donc, pour constater les propriétés qu'offre, dans sa partie variable, la quantité

$$\Theta = \mathrm{F}(x),$$

on se servira de la série

$$F'(x+n\,dx)\,dx = F'(x)\,dx + n\,F''(x)\,dx^2 + \ldots \frac{n(n+1)\ldots(n+m-3)}{1.2\ldots(m-2)} F^{(m-1)}(x)\,dx^{m-1}$$

$$+ \mathop{\mathrm{S}}_{n}^{m-1} F^{(m)}(x+n\,dx)\,dx^m,$$

qui définit le $n^{ième}$ élément de $\Theta_1 - \Theta$; et il sera facile d'en faire usage, parce que, pour toute valeur finie de n, chacun de ses termes est plus grand que la somme de ceux qui le suivent. En effet, comme

$$\mathop{\mathrm{S}}_{n}^{m-1} F^{(m)}(x+n\,dx)\,dx^m$$

tombe entre

$$\mathop{\mathrm{S}}_{n}^{m-1} F^{(m)}(x)\,dx^m = \frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1.2\ldots(m-1)} F^{(m)}(x)\,dx^m$$

et

$$\mathop{\mathrm{S}}_{n}^{m-1} F^{(m)}(x+\Delta x)\,dx^m = \frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1.2\ldots(m-1)} F^{(m)}(x+\Delta x)\,dx^m,$$

on peut poser

$$\mathop{\mathrm{S}}_{n}^{m-1} F^{(m)}(x+n\,dx)\,dx^m = \frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1.2\ldots(m-1)} F^{(m)}(x+\theta\Delta x)\,dx^m,$$

θ désignant un nombre compris entre 0 et 1; et dès lors la relation

$$F^{(m-1)}(x) > \frac{n+m-2}{m-1} F^{(m)}(x+\theta\Delta x)\,dx$$

est manifeste. En multipliant maintenant par

$$\frac{n(n+1)\ldots(n+m-3)}{1.2\ldots(m-2)}\,dx^{m-1}$$

les deux membres de cette inégalité, on obtient

$$\frac{n(n+1)\ldots(n+m-3)}{1.2\ldots(m-2)} F^{(m-1)}(x)\,dx^{m-1} > \frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1.2\ldots(m-1)} F^{(m)}(x+\theta\Delta x)\,dx^m,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{n(n+1)\ldots(n+m-3)}{1.2\ldots(m-2)} F^{(m-1)}(x)\,dx^{m-1} > \mathop{\mathrm{S}}_{n}^{m-1} F^{(m)}(x+n\,dx)\,dx^m.$$

17. Corollaire III. — Dans ce qui précède, nous avons défini analytiquement la génération de l'accroissement

$$\Theta_1 - \Theta = \mathrm{F}(x + \Delta x) - \mathrm{F}(x).$$

Considérons maintenant les états successifs

$$\mathrm{F}(x), \quad \mathrm{F}(x + dx), \quad \mathrm{F}(x + 2dx), \ldots,$$

par lesquels passe la quantité

$$\Theta = \mathrm{F}(x),$$

quand, en variant par degrés insensibles, elle devient

$$\Theta_1 = \mathrm{F}(x + \Delta x).$$

Il est d'abord évident qu'on aura

$$\mathrm{F}(x + ndx) = \mathrm{F}(x) + \mathop{\mathbf{S}}_{n} \mathrm{F}'(x + ndx)\,dx,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{F}(x + ndx) = \mathrm{F}(x) + n\mathrm{F}'(x)dx + \ldots \frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1.2\ldots(m-1)}\mathrm{F}^{(m-1)}(x)\,dx^{m-1}$$
$$+ \mathop{\mathbf{S}}_{n}^{m} \mathrm{F}^{(m)}(x + ndx)\,dx^{m},$$

ce qui donne

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(x),$$
$$\mathrm{F}(x + dx) = \mathrm{F}(x) + \mathrm{F}'(x)\,dx + \ldots \mathrm{F}^{(m-1)}(x)\,dx^{m-1} + \mathrm{F}^{(m)}(x + dx)\,dx^{m},$$
$$\mathrm{F}(x + 2dx) = \mathrm{F}(x) + 2\mathrm{F}'(x)dx + \ldots m\mathrm{F}^{(m-1)}(x)\,dx^{m-1} + \mathop{\mathbf{S}}_{2}^{m} \mathrm{F}^{(m)}(x + ndx)\,dx^{m},$$
$$\mathrm{F}(x + 3dx) = \mathrm{F}(x) + 3\mathrm{F}'(x)dx + \ldots \frac{m(m+1)}{1.2}\mathrm{F}^{(m-1)}(x)\,dx^{m-1} + \mathop{\mathbf{S}}_{3}^{m} \mathrm{F}^{(m)}(x + ndx)\,dx^{m},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathrm{F}(x + \Delta x) = \mathrm{F}(x) + \mathrm{F}'(x)\Delta x + \ldots \frac{\mathrm{F}^{(m-1)}(x)\,\Delta x^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} + \mathop{\mathbf{S}}_{\infty}^{m} \mathrm{F}^{(m)}(x + ndx)\,dx^{m},$$

lorsqu'on y fait successivement

$$n = 0, \quad n = 1, \quad n = 2, \ldots, \quad n = \infty.$$

4

Or, au moyen de l'équation fondamentale (14)

$$F(x+dx)=F(x)+F'(x+dx)\,dx,$$

on établit les suivantes :

1°.

$$\begin{aligned}
&F(x+dx)-F(x)=F'(x+dx)\,dx,\\
&F(x+2dx)-F(x+dx)=F'(x+2dx)\,dx,\\
&F(x+3dx)-F(x+2dx)=F'(x+3dx)\,dx,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

2°.

$$\begin{aligned}
&F'(x+2dx)\,dx-F'(x+dx)\,dx=F''(x+2dx)\,dx^2,\\
&F'(x+3dx)\,dx-F'(x+2dx)\,dx=F''(x+3dx)\,dx^2,\\
&F'(x+4dx)\,dx-F'(x+3dx)\,dx=F''(x+4dx)\,dx^2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

3°.

$$\begin{aligned}
&F^{(m-1)}(x+mdx)\,dx^{m-1}-F^{(m-1)}[x+(m-1)dx]\,dx^{m-1}=F^{(m)}(x+mdx)\,dx^m,\\
&F^{(m-1)}[x+(m+1)dx]\,dx^{m-1}-F^{(m-1)}(x+mdx)\,dx^{m-1}=F^{(m)}[x+(m+1)dx]\,dx^m,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Les seconds membres de ces équations sont les différences *premières*, *secondes*,..., $m^{\text{ièmes}}$ des valeurs

$$F(x),\quad F(x+dx),\quad F(x+2dx),\ldots;$$

et lorsque, au-dessous de chacune de ces valeurs, on place les différences de divers ordres qu'elle contient, il en résulte le tableau suivant :

$$\begin{array}{llll}
F(x), & F(x+dx), & F(x+2dx), & F(x+3dx),\ldots,\\
 & F'(x+dx)\,dx, & F'(x+2dx)\,dx, & F'(x+3dx)\,dx,\ldots,\\
 & & F''(x+2dx)\,dx^2, & F''(x+3dx)\,dx^2,\ldots,\\
 & & & F'''(x+3dx)\,dx^3,\ldots,\\
 & & & \ldots\ldots;
\end{array}$$

où l'on voit les positions qu'occupent dans

$$\Theta_1=F(x+\Delta x),$$

les quantités géométriques infiniment petites qui répondent à ces différences.

En ce qui concerne les expressions

$$F'(x)\,dx,\quad F''(x)\,dx^2,\quad F'''(x)\,dx^3,\ldots,$$

elles s'offrent tantôt comme multiplicateurs des termes dans les différents développements qui expriment les éléments de

$$\Theta_1 - \Theta = F(x + \Delta x) - F(x),$$

tantôt comme génératrices de divers ordres inhérentes à la quantité

$$\Theta_1 = F(x).$$

En effet, puisque

$$F'(x)\,dx,\quad F''(x)\,dx^2$$

représentent les limites formant les extrémités respectives des quantités

$$F(x),\quad F'(x)\,dx,$$

il est clair que la génératrice $F''(x)\,dx^2$ se trouve, aussi bien que celle $F'(x)\,dx$, à l'extrémité de

$$\Theta = F(x);$$

et ainsi des autres.

Enfin, si l'on désigne par la notation

$$_0\mathrm{S}_\infty\ F(x + n\,dx)$$

la somme de toutes les valeurs que prend successivement la quantité

$$\Theta = F(x),$$

devenant

$$\Theta_1 = F(x + \Delta x),$$

leur moyenne sera

$$\frac{_0\mathrm{S}_\infty\ F(x + n\,dx)}{\infty};$$

et comme

$$
{}_0\mathrm{S}_n \mathrm{F}(x+ndx) = (n+1)\mathrm{F}(x) + \frac{n(n+1)}{1.2}\mathrm{F}'(x)\,dx + \ldots
$$

$$
+ \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2\ldots m}\mathrm{F}^{(m-1)}(x)\,dx^{m-1} + \mathrm{S}_n^{m+1}\mathrm{F}^{(m)}(x+ndx)\,dx^m,
$$

$$
{}_0\mathrm{S}_\infty \mathrm{F}(x+ndx) = \left[\mathrm{F}(x) + \frac{\mathrm{F}'(x)\Delta x}{1.2} + \ldots + \frac{\mathrm{F}^{(m-1)}(x)\Delta x^{m-1}}{1.2\ldots m}\right]\infty
$$

$$
+ \mathrm{S}_\infty^{m+1}\mathrm{F}^{(m)}(x+ndx)\,dx^m,
$$

on trouve

$$
\frac{{}_0\mathrm{S}_\infty \mathrm{F}(x+ndx)}{\infty} = \mathrm{F}(x) + \frac{\mathrm{F}'(x)\Delta x}{1.2} + \ldots + \frac{\mathrm{F}^{(m-1)}(x)\Delta x^{m-1}}{1.2\ldots m}
$$

$$
+ \frac{\mathrm{S}_\infty^{m+1}\mathrm{F}^{(m)}(x+ndx)}{\infty}\,dx^m.
$$

18. Scolie. — Les résultats que donnent les opérations

$$
\mathrm{S}_\infty \mathrm{F}'(x+ndx)\,dx, \qquad \frac{{}_0\mathrm{S}_\infty \mathrm{F}'(x+ndx)}{\infty}\Delta x,
$$

sont identiques.

Donc, la somme des éléments que fournit la génératrice

$$
\mathrm{F}'(x)\,dx,
$$

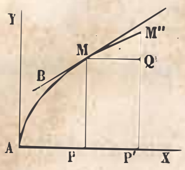
dans l'intervalle Δx, est équivalente au produit de ce même intervalle par la moyenne des valeurs que prend, dans son étendue, la dérivée

$$
\mathrm{F}'(x).
$$

APPLICATIONS.

19. Soit AM (*fig.* 1) une ligne courbe rapportée aux axes AX, AY. Quand on suppose que l'abscisse AP, en croissant, devienne AP′, l'ordonnée PM, entraînée par le mouvement du point P, passe dans la position P′ M′; et dès lors

Fig. 1.



1°. La limite P de l'abscisse AP est la génératrice de son accroissement PP′;

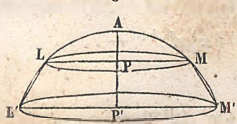
2°. La limite M de l'ordonnée PM est la génératrice de son accroissement QM′;

3°. La limite M de l'arc AM est la génératrice de son accroissement MM′;

4°. Enfin la limite PM de la surface plane APM est la génératrice de son accroissement PMM′P′.

Si l'on conçoit maintenant que le solide de révolution LAM (*fig.* 2) s'accroisse de LMM′L′, la tranche LMM′ L′ sera engendrée par le cercle LM; tandis que sa surface courbe LMM′L′ aura pour génératrice la circonférence LM.

Fig. 2.



20. Représentons par

$$y = \mathrm{F}(x)$$

l'équation de la courbe AM (*fig.* 1).

Dans ses positions successives, l'ordonnée PM prendra les valeurs

$$\mathrm{F}(x),\quad \mathrm{F}(x+dx),\quad \mathrm{F}(x+2\,dx),\ldots,$$

et par conséquent, pour constater ce que devient la courbe AM dans le voisinage du point M qui répond à l'abscisse AP $= x$, il suffira de considérer la série

$$\mathrm{F}(x)+\mathrm{F}'(x)\,dx+\mathrm{F}''(x)\,dx^2+\ldots+\mathrm{F}^{(m-1)}(x)\,dx^{m-1}+\mathrm{F}^{(m)}(x+dx)\,dx^m,$$

qui définit l'ordonnée

$$\mathrm{F}(x+dx).$$

21. En général, si AP $= x$ est l'abscisse du point M commun aux deux lignes

AM, BM,

ayant pour équations

$$y = \mathrm{F}(x),\quad y = f(x),$$

et si de plus on a

$$F'(x) = f'(x),$$
$$F''(x) = f''(x),$$
$$\vdots$$
$$F^{(k)}(x) = f^{(k)}(x),$$

le contact de ces lignes sera de l'ordre k. Et il ne s'étendra pas au delà du point M; car, à cause de

$$F^{(k+1)}(x) \gtrless f^{(k+1)}(x),$$

les ordonnées

$$F(x+dx) = F(x) + F'(x)\,dx + \ldots F^{(k)}(x)\,dx^k + F^{(k+1)}(x)\,dx^{k+1} + \ldots$$
$$+ F^{(m-1)}(x)\,dx^{m-1} + F^{(m)}(x+dx)\,dx^m,$$
$$f(x+dx) = f(x) + f'(x)\,dx + \ldots f^{(k)}(x)\,dx^k + f^{(k+1)}(x)\,dx^{k+1} + \ldots$$
$$+ f^{(m-1)}(x)\,dx^{m-1} + f^{(m)}(x+dx)\,dx^m,$$

qui succèdent immédiatement à celles

$$F(x), \qquad f(x),$$

seront déjà inégales.

§ II. — GÉNÉRATION INVERSE DES QUANTITÉS CONTINUES.

22. Lemme. — Pour exprimer que la quantité x diminue de Δx, nous ne possédons pas de moyen autre que celui de changer Δx en $-\Delta x$ dans

$$x + \Delta x;$$

de sorte que les expressions

$$x,$$
$$x - dx,$$
$$x - dx - dx,$$
$$\vdots$$
$$x - \Delta x$$

représentent les valeurs que prend successivement la quantité

$$\theta = x,$$

quand, en décroissant uniformément et par degrés insensibles, elle devient

$$_{1}\theta = x - \Delta x.$$

Nous allons maintenant établir les conséquences qui résultent de cette notation.

THÉORÈME I.

23. *Lorsque la limite λ se meut vers l'origine de*

$$\Theta = \mathrm{F}(x),$$

cette quantité décroît par suite de l'accroissement qu'acquiert en ce moment la portion adjacente du lieu dans lequel s'opèrent ses variations continues; et le résultat analytique de la génération qu'effectue de cette manière la limite λ est de la forme

$$\mathbf{S}_{\infty} \mathrm{F}'(x - n\,dx)\,dx = \mathrm{F}'(x)\,\Delta x - \frac{\mathrm{F}''(x)\,\Delta x^2}{1.2} + \ldots \mp \frac{\mathrm{F}^{(m-1)}(x)\,\Delta x^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}$$

$$\pm \mathbf{S}_{\infty}^{m} \mathrm{F}^{(m)}(x - n\,dx)\,dx^m.$$

Démonstration. — Considérons les deux intervalles

$$\mathrm{F}(x), \quad \mathrm{F}(x + m\Delta x) - \mathrm{F}(x),$$

de la quantité unique

$$\Theta_m = \mathrm{F}(x + m\Delta x).$$

Quand la limite qui les sépare se meut vers l'origine de Θ_m, ses positions successives répondent aux valeurs

$$x - dx,$$
$$x - dx - dx,$$
$$\vdots$$
$$x - \Delta x,$$

de la quantité décroissante x; et il est évident qu'elles forment les accroissements

$$\mathrm{F}'(x - dx)\,dx,$$
$$\mathrm{F}'(x - 2\,dx)\,dx,$$
$$\vdots$$
$$\mathrm{F}'(x - \Delta x)\,dx,$$

de l'intervalle

$$\mathrm{F}(x + m\Delta x) - \mathrm{F}(x),$$

qui déterminent les décroissements

$$-\mathrm{F}'(x - dx)\,dx,$$
$$-\mathrm{F}'(x - 2\,dx)\,dx,$$
$$\vdots$$
$$-\mathrm{F}'(x - \Delta x)\,dx$$

de l'intervalle

$$\mathrm{F}(x).$$

Or, la quantité isolée

$$\Theta = \mathrm{F}(x)$$

décroît de la même manière; car, changeant dx en $-dx$, l'équation

$$\mathrm{F}(x + dx) = \mathrm{F}(x) + \mathrm{F}'(x + dx)\,dx$$

devient

$$\mathrm{F}(x - dx) = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}'(x - dx)\,dx.$$

Et, si dans

$$\mathrm{F}(x + m\Delta x) - \mathrm{F}(x)$$

on remplace m par le nombre indéterminé n, ce qui n'altère pas les accroissements ci-dessus,

$$\mathrm{F}(x + n\Delta x) - \mathrm{F}(x)$$

sera un intervalle indéfini, ou, ce qui est la même chose, une portion du lieu dans lequel varie Θ. Donc le décroissement

$$-\mathrm{S}_{\infty} \mathrm{F}'(x - ndx)\,dx$$

de la quantité

$$\Theta = \mathrm{F}(x),$$

résulte de l'accroissement

$$\mathrm{S}_{\infty} \mathrm{F}'(x - ndx)\,dx$$

de la portion adjacente de son lieu; et puisque

$$\mathrm{F}'(x-ndx)\,dx = \mathrm{F}'(x)\,dx - n\mathrm{F}''(x)\,dx^2 + \ldots \mp \frac{n(n+1)\ldots(n+m-3)}{1.2\ldots(m-2)} \mathrm{F}^{(m-1)}(x)\,dx^{m-1}$$
$$\pm \mathrm{S}_n^{m-1} \mathrm{F}^{(m)}(x - ndx)\,dx^m,$$

il s'ensuit

$$\mathrm{S}_n \mathrm{F}'(x - ndx)\,dx = n\,\mathrm{F}'(x)\,dx - \frac{n(n+1)}{1.2} \mathrm{F}''(x)\,dx^2 + \ldots$$
$$\mp \frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1.2\ldots(m-1)} \mathrm{F}^{(m-1)}(x)\,dx^{m-1} \pm \mathrm{S}_n^m \mathrm{F}^{(m)}(x-ndx)\,dx^m,$$

$$\mathrm{S}_{\infty} \mathrm{F}'(x - ndx)\,dx = \mathrm{F}'(x)\,\Delta x - \frac{\mathrm{F}''(x)\,\Delta x^2}{1.2} + \ldots$$
$$\mp \frac{\mathrm{F}^{(m-1)}(x)\,\Delta x^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} \pm \mathrm{S}_{\infty}^m \mathrm{F}^{(m)}(x - ndx)\,dx^m.$$

Donc, etc.

24. Scolie. — Comme en général le mouvement d'une limite, considéré par rapport à son effet, est ce qu'on appelle *génération*, on pourrait bien de cette définition déduire le théorème qui précède.

Mais, en procédant ainsi, on érigerait en *hypothèse fondamentale* la définition ci-dessus, et notre analyse cesserait d'être une application pure et simple du calcul abstrait. Pour qu'elle conserve ce caractère, il faut que ses principes généraux dérivent uniquement de la marche des valeurs

$$\begin{aligned} &x, \\ &x + dx, \\ &x + dx + dx, \end{aligned}$$

de la variable x, qui sont, pour ainsi dire, les nombres naturels de la continuité.

25. Définition. — Nous nommerons *inverse* toute génération dans laquelle la limite génératrice se meut vers l'origine de la quantité que représente la variable indépendante.

26. Corollaire I. — Quand la limite qui forme l'origine de la quantité

$$F(x + m\Delta x) - F(x + \Delta x)$$

se meut vers l'origine de x, il en résulte la génération inverse de l'accroissement

$$F(x + m\Delta x) - F(x) - [F(x + m\Delta x) - F(x + \Delta x)] = F(x + \Delta x) - F(x).$$

Les éléments de la quantité

$$F(x + \Delta x) - F(x)$$

offrent alors la série

$$F'(x + \Delta x - dx)\,dx + F'(x + \Delta x - 2dx)\,dx + \ldots F'(x + \Delta x - ndx)\,dx + \ldots$$

dont le terme général

$$F'(x + \Delta x - ndx)\,dx = F'(x + \Delta x)\,dx - nF''(x + \Delta x)\,dx^2 + \ldots$$
$$\mp \frac{n(n+1)\ldots(n+m-3)}{1.2\ldots(m-2)} F^{(m-1)}(x + \Delta x)\,dx^{m-1} \pm \mathop{\mathrm{S}}_n^{m-1} F^{(m)}(x + \Delta x - ndx)\,dx^m$$

donne

$$\mathop{\mathrm{S}}_n F'(x + \Delta x - ndx)\,dx = nF'(x + \Delta x)\,dx - \frac{n(n+1)}{1.2} F''(x + \Delta x)\,dx^2 + \ldots$$
$$\mp \frac{n(n-1)\ldots(n+m-2)}{1.2\ldots(m-1)} F^{(m-1)}(x + \Delta x)\,dx^{m-1} \pm \mathop{\mathrm{S}}_n^{m} F^{(m)}(x + \Delta x - ndx)\,dx^m$$

et finalement

$$\mathrm{S}_{\infty} \mathrm{F}'(x+\Delta x - ndx)\,dx = \mathrm{F}'(x+\Delta x)\,\Delta x - \mathrm{F}''(x+\Delta x)\frac{\Delta x^2}{1.2} + \ldots$$
$$\mp \mathrm{F}^{(m-1)}(x+\Delta x)\frac{\Delta x^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} \pm \mathrm{S}_{\infty}^{m} \mathrm{F}^{(m)}(x+\Delta x - ndx)\,dx^m.$$

27. COROLLAIRE II. — Décomposons la quantité

$$\Theta_1 - \Theta = \mathrm{F}(x+\Delta x) - \mathrm{F}(x)$$

en ses deux intervalles

$$\mathrm{F}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) - \mathrm{F}(x), \qquad \mathrm{F}(x+\Delta x) - \mathrm{F}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

En supposant la génération inverse dans le premier, et directe dans le second, on aura

$$\mathrm{F}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) - \mathrm{F}(x) = \mathrm{S}_{\infty} \mathrm{F}'\left(x+\frac{\Delta x}{2} - \frac{ndx}{2}\right)\frac{dx}{2},$$
$$\mathrm{F}(x+\Delta x) - \mathrm{F}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \mathrm{S}_{\infty} \mathrm{F}'\left(x+\frac{\Delta x}{2} + \frac{ndx}{2}\right)\frac{dx}{2},$$

et, ajoutant,

$$\mathrm{F}(x+\Delta x) - \mathrm{F}(x) = \mathrm{S}_{\infty} \mathrm{F}'\left(x+\frac{\Delta x}{2} - \frac{ndx}{2}\right)\frac{dx}{2} + \mathrm{S}_{\infty} \mathrm{F}'\left(x+\frac{\Delta x}{2} + \frac{ndx}{2}\right)\frac{dx}{2};$$

puis, comme

$$\mathrm{S}_{\infty} \mathrm{F}'\left(x+\frac{\Delta x}{2} - \frac{ndx}{2}\right)\frac{dx}{2} = \mathrm{F}'\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\Delta x}{2} - \frac{\mathrm{F}''\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{1.2}\frac{\Delta x^2}{2^2} + \ldots,$$
$$\mathrm{S}_{\infty} \mathrm{F}'\left(x+\frac{\Delta x}{2} + \frac{ndx}{2}\right)\frac{dx}{2} = \mathrm{F}'\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\Delta x}{2} + \frac{\mathrm{F}''\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{1.2}\frac{\Delta x^2}{2^2} + \ldots,$$

on conclut

$$\mathrm{F}(x+\Delta x) - \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}'\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x + \frac{\mathrm{F}'''\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{1.2.3}\frac{\Delta x^3}{2^2} + \ldots,$$
$$+ \frac{\mathrm{F}^{(2m-1)}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{1.2\ldots(2m-1)}\frac{\Delta x^{2m-1}}{2^{2m-2}} + \mathrm{S}_{\infty}^{2m+1} \mathrm{F}^{(2m+1)}\left(x+\frac{\Delta x}{2} - \frac{ndx}{2}\right)\frac{dx^{2m+1}}{2^{2m+1}}$$
$$+ \mathrm{S}_{\infty}^{2m+1} \mathrm{F}^{(2m+1)}\left(x+\frac{\Delta x}{2} + \frac{ndx}{2}\right)\frac{dx^{2m+1}}{2^{2m+1}},$$

et l'on obtient ainsi une troisième formule qui donne, en série unique, la valeur de la quantité

$$F(x + \Delta x) - F(x).$$

On peut nommer *mixte* la génération qu'exprime cette formule.

THÉORÈME II.

28. *Quand on suppose que la différence*

$$\Delta x,$$

en décroissant, se réduise à son dernier élément

$$dx,$$

la quantité

$$\Theta_1 = F(x + \Delta x)$$

redevient

$$\Theta = F'(x);$$

tandis que celle

$$\Theta_1 - \Theta = F(x + \Delta x) - F(x)$$

séparée de Θ, *fournit la génératrice*

$$F'(x)\,dx.$$

DÉMONSTRATION. — Observons :

1°. Que le dernier élément de la quantité décroissante

$$\Delta x$$

détermine la dernière position qu'occupe, dans son mouvement inverse, la limite λ;

2°. Qu'en vertu d'un tel mouvement (**23**), la limite λ, dans sa dernière position, prend la valeur (**26**)

$$F'(x + \Delta x - \infty\, dx)\, dx = F'(x)\, dx\,;$$

3°. Que, dans l'hypothèse ci-dessus, nous considérons cette position de λ, en faisant abstraction de celles qui l'ont précédée.

Or, lorsque la génératrice λ, ayant accompli son mouvement inverse, forme l'extrémité de Θ, sa dernière valeur

$$F'(x)\, dx$$

rentre dans celle

$$F(x)$$

de cette quantité (**17**); et, par suite,

$$\Theta_1 = F(x + \Delta x)$$

redevient

$$\Theta = F(x).$$

Mais quand

$$\Theta_1 - \Theta$$

est séparée de Θ, la génératice λ, parvenue à l'origine de $\Theta_1 - \Theta$, conserve sa dernière valeur isolée

$$F'(x)\, dx.$$

Donc, dans ce cas, la quantité

$$\Theta_1 - \Theta = F(x + \Delta x) - F(x)$$

se réduit à sa génératrice

$$F'(x)\, dx.$$

Donc, etc.

29. Scolie I. — En changeant de notation, nous pouvons affirmer que les quantités

$$F(x + \Delta x), \quad F(x + \Delta x) - F(x)$$

deviennent

$$F(x),\quad F'(x)\frac{\Delta x}{\infty},$$

lorsque Δx en décroissant se réduit à $\frac{\Delta x}{\infty}$.

Cela posé, écrivons

$$F(x+\Delta x) = F(x) + F'(x)\Delta x + \frac{F''(x)\Delta x^2}{1.2} + \ldots,$$

$$F(x+\Delta x) - F(x) = F'(x)\Delta x + \frac{F''(x)\Delta x^2}{1.2} + \ldots.$$

Quand on remplace Δx par $\frac{\Delta x}{\infty}$ et qu'on efface dans les deux séries les termes qu'annule le symbole ∞, il reste

$$F\left(x+\frac{\Delta x}{\infty}\right) = F(x),$$

$$F\left(x+\frac{\Delta x}{\infty}\right) - F(x) = F'(x)\frac{\Delta x}{\infty}.$$

Ainsi, le calcul abstrait confirme pleinement les conclusions du théorème qui précède.

Or, ce théorème a été fondé directement sur ceux I, II (§ I) et I (§ II), c'est-à-dire, sur les significations géométriques des éléments

$$dx,\quad dx,\quad dx,\ldots,$$

$$F'(x+dx)\,dx,\quad F'(x+2\,dx)\,dx,\ldots,$$

$$F'(x+\Delta x - dx)\,dx,\quad F'(x+\Delta x - 2\,dx)\,dx,\ldots,$$

et sans égard à la valeur abstraite de dx. Donc l'identité des résultats que donne ici l'infini ∞, vérifie en même temps les théorèmes I, II (§ I) et I (§ II).

30. Scolie II. — Les équations

$$F\left(x+\frac{\Delta x}{\infty}\right) = F(x),$$

$$F\left(x+\frac{\Delta x}{\infty}\right) - F(x) = F'(x)\frac{\Delta x}{\infty},$$

n'entraînent pas les suivantes :

$$F\left(x+\frac{\Delta x}{\infty}\right)-F(x)=0,$$

$$F\left(x+\frac{\Delta x}{\infty}\right)=F(x)+F'(x)\frac{\Delta x}{\infty};$$

car, en général, lorsque les réductions ne sont effectuées que dans un seul membre d'une équation contenant l'infini ∞, aucune transposition de termes ne peut avoir lieu.

31. Corollaire. — En rapprochant de ce qui a été établi précédemment le théorème ci-dessus, et observant qu'une quantité géométrique telle que

$$\Omega=f(x,\Delta x)$$

ne saurait contenir des cas autres que ceux que nous venons de considérer, on peut dire que la règle

$$\infty \pm A=\infty$$

est applicable à tout résultat analytique que fournit, par son mouvement *accompli*, une limite qui change de position.

THÉORÈME III.

32. *Soit*

$$\Omega=f(x)\Delta x+P\Delta x^2+Q\Delta x^3+\ldots$$

une quantité géométrique différente de

$$\Theta_1-\Theta=F(x+\Delta x)-F(x),$$

mais tellement liée à cette dernière, que, lorsque la différence Δx, en décroissant, se réduit à son dernier élément dx, les deux quantités

$$\Omega,\quad \Theta_1-\Theta$$

et leurs significations respectives se confondent dans la limite λ.

Alors, faisant

$$F'(x)\,dx = f(x)\,dx,$$

on déterminera, au moyen de la quantité

$$\Omega = f(x)\,\Delta x + \mathrm{P}\,\Delta x^2 + \ldots$$

l'expression analytique de la génératrice λ.

Démonstration. — Lorsque les quantités

$$\Omega = f(x)\,\Delta x + \mathrm{P}\,\Delta x^2 + \mathrm{Q}\,\Delta x^3 + \ldots,$$

$$\Theta_1 - \Theta = F'(x)\,\Delta x + F''(x)\,\frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{F'''(x)\,\Delta x^3}{1.2.3} + \ldots$$

et leurs significations respectives se confondent dans la limite génératrice λ, quand on suppose que Δx, en décroissant, se réduise à son dernier élément

$$dx = \frac{\Delta x}{\infty},$$

il en résulte

$$F'(x)\,\frac{\Delta x}{\infty} + \frac{F''(x)}{1.2}\,\frac{\Delta x^2}{\infty^2} + \ldots = f(x)\,\frac{\Delta x}{\infty} + \mathrm{P}\,\frac{\Delta x^2}{\infty^2} + \ldots.$$

Dans cette hypothèse, la limite λ passe de l'extrémité à l'origine de $\Theta_1 - \Theta$ (**28**) ; et la quantité Ω varie par suite de ce mouvement *accompli* de la limite λ. Donc, la règle

$$\infty \pm \mathrm{A} = \infty$$

est applicable aux deux membres de l'équation ci-dessus ; et, en opérant les réductions, on obtient

$$F'(x)\,\frac{\Delta x}{\infty} = f(x)\,\frac{\Delta x}{\infty},$$

ou, ce qui revient au même,

$$F'(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Donc, etc.

APPLICATIONS.

33. Conformément au théorème III, on obtient la génératrice cherchée au moyen de la quantité

$$\Omega = f(x)\,\Delta x + P\,\Delta x^2 + \ldots,$$

en prenant le premier terme de l'expression développée de celle-ci et changeant Δx en dx.

Le théorème II nous met à même de simplifier cette méthode. En effet, la quantité auxiliaire Ω sera généralement fonction des quantités *géométriques* telles que

$$\Delta x, \qquad \varphi(x + \Delta x), \qquad \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x);$$

et comme, dans l'hypothèse $\Delta x = dx$, ces dernières deviennent respectivement

$$dx, \qquad \varphi(x), \qquad \varphi'(x)\,dx,$$

la substitution immédiate de ces résultats dispense du calcul auquel donne lieu l'opération du développement.

La détermination de la quantité

$$\Omega$$

peut se faire à l'aide de différentes considérations. Nous établirons d'abord que l'arc se confond analytiquement avec sa corde au moment où ses deux extrémités coïncident; et ensuite nous formerons toujours la quantité Ω, en substituant dans la proposée les cordes aux arcs, qui s'y réduisent à leurs derniers éléments lorsqu'on suppose $\Delta x = dx$.

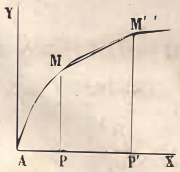
I.

Soit donc AM (*fig* 3) une courbe plane définie par l'équation

$$y = \varphi(x)$$

entre coordonnées rectangulaires.

Fig. 3.



Quand l'accroissement $PP' = \Delta x$ de l'abscisse $AP = x$, en décroissant, se réduit à son dernier élément dx situé au point P, l'ordonnée

$$P'M' = \varphi(x + \Delta x)$$

coïncide avec celle

$$PM = \varphi(x);$$

et, au point M, l'arc MM′ se confond avec sa corde

$$MM' = \sqrt{\Delta x^2 + [\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)]^2}.$$

Or l'arc MM′ est le chemin parcouru par le point générateur M.

La corde MM′ est le plus court chemin du point M′ à celui M.

Donc, puisqu'au point M ces deux chemins n'en forment plus qu'un seul, qu'exprime le dernier élément de l'arc décroissant M′M, il faut que la corde MM′ fournisse, pour $\Delta x = dx$, l'expression du point générateur M. On aura donc ici

$$\Omega = \sqrt{\Delta x^2 + [\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)]^2};$$

et changeant

$$\Delta x, \qquad \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$$

respectivement en

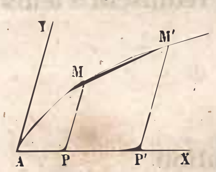
$$dx, \qquad \varphi'(x)\,dx,$$

on obtient

$$\text{point gén. M} = \sqrt{1 + \varphi'^2(x)}\,dx.$$

II.

Fig. 4.



Quand on remplace, dans l'accroissement PMM′P′ (*fig.* 4) de la surface plane APM, l'arc MM′ par sa corde, on obtient le trapèze rectiligne PMM′P′ pour la détermination de la génératrice PM. Donc, si

$$y = \varphi(x)$$

est l'équation de la courbe AM rapportée aux axes AY, AX, formant l'angle α, on aura

$$\Omega = \frac{1}{2}[\varphi(x) + \varphi(x+\Delta x)]\,\Delta x \sin\alpha;$$

et il vient

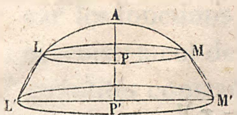
$$\text{gén. PM} = \varphi(x)\,dx \sin\alpha.$$

III.

Lorsque le solide de révolution LAM (*fig.* 5) s'accroît de la tranche LMM'L', tous les points de la circonférence LM décrivent des arcs dont l'ensemble forme la surface courbe LMM'L'; et quand, à tous ces arcs, on substitue leurs cordes, il en résulte le cône tronqué

$$\Omega = \mathrm{LMM'L'}.$$

Fig. 5.



De sorte que pour établir les expressions respectives du cercle générateur LM de la tranche LMM'L', et de la circonférence génératrice LM de la surface courbe LMM'L', il suffit d'observer que, si

$$\mathrm{AP} = x, \qquad \mathrm{PM} = \varphi(x),$$

sont les coordonnées du point M, le volume du cône tronqué Ω sera

$$\pi[\varphi^2(x) + \varphi^2(x+\Delta x) + \varphi(x)\varphi(x+\Delta x)]\frac{\Delta x}{3},$$

et sa surface convexe

$$\pi[\varphi(x) + \varphi(x+\Delta x)]\sqrt{\Delta x^2 + [\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)]^2};$$

ce qui donne sur-le-champ

$$\text{cercle gén. LM} = \pi\varphi^2(x)\,dx,$$

$$\text{circonf. gén. LM} = 2\pi\varphi(x)\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,dx.$$

On voit, par ces exemples, que la substitution immédiate mène plus promptement au but que le développement en série qui résulte uniquement du théorème III.

34. Représentons maintenant généralement par

$$f(x)\,dx$$

la génératrice trouvée.

La notation

$$\sum f(x+dx)\,dx$$

conviendra à toute quantité qui s'accroît de la différence infiniment petite

$$f(x+dx)\,dx,$$

lorsque x devient $x+dx$.

Soient :

x_0, l'origine du lieu,

$x-x_0$, son étendue indéfinie ;

et faisons

$$\frac{x-x_0}{\infty}=(x-x_0)_i.$$

La somme

$$\mathbf{S}_{\infty} f[x_0+n(x-x_0)_i](x-x_0)_i=f(x_0)(x-x_0)+\frac{f'(x_0)(x-x_0)^2}{1.2}+\ldots$$
$$+\frac{f^{(m-2)}(x_0)(x-x_0)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}+\mathbf{S}_{\infty}^{m} f^{(m-1)}[x_0+n(x-x_0)_i](x-x_0)_i^m$$

s'accroîtra de

$$f(x+dx)\,dx$$

dans l'hypothèse ci-dessus. Et pour qu'il n'y ait aucun doute possible à ce sujet, nous le constaterons *à posteriori*.

En observant qu'en vertu de la formule

$$(14)\qquad \mathrm{F}(x+dx)-\mathrm{F}(x)=\mathrm{F}'(x)\,dx+\mathrm{F}''(x)\,dx^2+\ldots,$$

on a généralement

$$[(x-x_0)+dx]^m-(x-x_0)^m=m(x-x_0)^{m-1}dx+m(m-1)(x-x_0)^{m-2}dx^2+\ldots,$$

on obtient d'abord

$$d\,\mathbf{S}_{\infty} f[x_0+n(x-x_0)_i](x-x_0)_i=$$
$$dx\left[f(x_0)+\frac{2}{1.2}f'(x_0)(x-x_0)+\frac{3}{1.2.3}f''(x_0)(x-x_0)^2+\ldots\right]$$
$$+dx^2\left[\frac{2.1}{1.2}f'(x_0)+\frac{3.2}{1.2.3}f''(x_0)(x-x_0)+\frac{4.3}{1.2.3.4}f'''(x_0)(x-x_0)^2+\ldots\right]$$
$$+dx^3\left[\frac{3.2.1}{1.2.3}f''(x_0)+\frac{4.3.2}{1.2.3.4}f'''(x_0)(x-x_0)+\frac{5.4.3}{1.2.3.4.5}f^{\mathrm{IV}}(x_0)(x-x_0)^2+\ldots\right]$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

et quand aux séries horizontales on substitue les quantités dont elles expriment les développements, il vient

$$d\,\mathbf{S}_{\infty} f[x_0 + n(x - x_0)_i](x - x_0)_i = f(x)\,dx + f'(x)\,dx^2 + f''(x)\,dx^3 + \ldots$$
$$= f(x + dx)\,dx.$$

En conséquence, nous pouvons poser

$$\sum f(x + dx)dx = \mathrm{C} + \mathbf{S}_{\infty} f[x_0 + n(x - x_0)_i](x - x_0)_i;$$

car les fonctions qui fournissent des différences identiques pour un même accroissement de la variable indépendante, ne peuvent différer que par des quantités constantes.

La notation

$$\sum f(x - dx)\,dx$$

désigne les quantités qui s'accroissent de

$$f(x - dx)\,dx,$$

lorsque x décroît.

On les exprimera par la génération inverse.

Alors x_0 étant l'origine du lieu, son étendue indéfinie sera

$$x_0 - x,$$

et le lieu lui-même

$$\mathbf{S}_{\infty} f[x_0 - n(x_0 - x)_i](x_0 - x)_i = f(x_0)(x_0 - x) - \frac{f'(x_0)(x_0 - x)^2}{1.2} + \ldots$$
$$\mp \frac{f^{(m-2)}(x_0)(x_0 - x)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} \pm \mathbf{S}_{\infty}^{m} f^{(m-1)}[x_0 - n(x_0 - x)_i](x_0 - x)_i^m.$$

Cette somme donne

$$d\,\mathbf{S}_{\infty} f[x_0 - n(x_0 - x)_i](x_0 - x)_i =$$
$$dx\left[f(x_0) - \frac{2}{1.2}f'(x_0)(x_0 - x) + \frac{3}{1.2.3}f''(x_0)(x_0 - x)^2 - \ldots\right]$$
$$- dx^2\left[\frac{2.1}{1.2}f'(x_0) - \frac{3.2}{1.2.3}f''(x_0)(x_0 - x) + \frac{4.3}{1.2.3.4}f'''(x_0)(x_0 - x)^2 - \ldots\right]$$
$$+ dx^3\left[\frac{3.2.1}{1.2.3}f''(x_0) - \frac{4.3.2}{1.2.3.4}f'''(x_0)(x_0 - x) + \frac{5.4.3}{1.2.3.4.5}f^{\mathrm{IV}}(x_0)(x_0 - x)^2 - \ldots\right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

ce qui se réduit à

$$d\mathop{\mathrm{S}}_{\infty} f[x_0 - n(x_0 - x)_i](x_0 - x)_i = f(x)dx - f'(x)dx^2 + f''(x)dx^3 - \ldots$$
$$= f(x - dx)dx.$$

On aura donc bien

$$\sum f(x - dx)dx = \mathrm{C} + \mathop{\mathrm{S}}_{\infty} f[x_0 - n(x_0 - x)_i](x_0 - x)_i.$$

Mais, lorsqu'il ne s'agit que d'établir l'expression de la quantité continue que fournit, entre les deux limites fixes

$$x = a, \qquad x = b,$$

la génératrice

$$f(x)dx,$$

on peut évidemment se servir de l'une ou de l'autre de ces deux formules. Le choix est déterminé par la nature du cas qui s'offre.

On peut aussi faire usage de la suivante :

$$\mathop{\mathrm{S}}_{\infty} f\left[\frac{x_2 + x_1 - n(x_2 - x_1)_i}{2}\right]\frac{(x_2 - x_1)_i}{2} + \mathop{\mathrm{S}}_{\infty} f\left[\frac{x_2 + x_1 + n(x_2 - x_1)_i}{2}\right]\frac{(x_2 - x_1)_i}{2}$$
$$= f\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)(x_2 - x_1) + \frac{f''\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)}{1.2.3}\frac{(x_2 - x_1)^3}{2^2} + \ldots$$
$$+ \frac{f^{(2m-2)}\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)}{1.2\ldots(2m-1)}\frac{(x_2 - x_1)^{2m-1}}{2^{2m-2}} + \mathop{\mathrm{S}}_{\infty}^{2m+1} f^{(2m)}\left[\frac{x_2 + x_1 - n(x_2 - x_1)_i}{2}\right]\frac{(x_2 - x_1)^{2m+1}}{2^{2m+1}}$$
$$+ \mathop{\mathrm{S}}_{\infty}^{2m+1} f^{(2m)}\left[\frac{x_2 + x_1 + n(x_2 - x_1)_i}{2}\right]\frac{(x_2 - x_1)^{2m+1}}{2^{2m+1}},$$

que donne la génération mixte; et où l'on suppose deux lieux géométriques ayant une origine commune x_0, et dans lesquels x_1 et x_2 varient de telle sorte qu'on a toujours

$$x_0 - x_1 = x_2 - x_0,$$

ce qui entraîne

$$x_0 = \frac{x_2 + x_1}{2}.$$

Si $b > a$, on fera, dans la première de ces formules,

$$x_0 = a, \qquad x = b, \ldots\ldots$$

dans la seconde

$$x_0 = l, \qquad x = a,$$

et dans la troisième

$$x_1 = a, \qquad x_2 = b.$$

Tels sont les résultats immédiats les plus simples auxquels conduit une génératrice donnée. On en remontera à l'application des fonctions primitives par les considérations employées habituellement.

SCOLIE GÉNÉRAL.

35. Le calcul à l'aide duquel nous sommes parvenu à définir la continuité géométrique est évidemment applicable aux fonctions abstraites ou empiriques quelconques.

Car, si la fonction

$$\mathrm{F}(x),$$

en devenant

$$\mathrm{F}(x + dx), \qquad \mathrm{F}(x + 2dx), \ldots, \qquad \mathrm{F}(x + \Delta x),$$

varie sans discontinuité, cela ne vient pas d'une certaine signification attribuée à cette fonction, mais bien des valeurs intrinsèques de ses accroissements successifs

$$\mathrm{F}'(x + dx)dx, \qquad \mathrm{F}'(x + 2dx)dx, \ldots,$$

valeurs qui ne sont pas une pure hypothèse, puisqu'on a effectivement

$$\mathrm{S}_{\infty}\, \mathrm{F}'(x + n\,dx)\,dx = \mathrm{F}'(x)\,\Delta x + \frac{\mathrm{F}''(x)\,\Delta x^2}{1.2} + \ldots$$
$$+ \frac{\mathrm{F}^{(m-1)}(x)\,\Delta x^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} + \mathrm{S}_{\infty}^{m}\, \mathrm{F}^{(m)}(x + n\,dx)\,dx^m.$$

La considération des quantités géométriques nous a seulement servi à constater la continuité mathématique et à donner une application particulière du calcul qui en dérive. D'autres applications exigeront d'autres raisonnements ; mais les résultats analytiques déterminés toujours par les propriétés abstraites de l'infini

$$\infty$$

suivront la même loi.

Quant à la nature intime de notre calcul, il est certain qu'on ne peut exprimer par des nombres finis deux valeurs qui se succèdent immédiatement, comme

$$x$$

et

$$x + dx,$$

ni établir deux états d'une quantité géométrique

$$\theta,$$

qui ne diffèrent que par une seule position de leur limite ζ.

Cependant il ne saurait être mis en doute que, lorsque la quantité θ croît par degrés insensibles, sa valeur x varie de la même manière. Or, du moment qu'il en est ainsi, il nous a été permis de désigner symboliquement par

$$\begin{array}{l} x, \\ x + dx, \\ x + dx + dx, \\ \vdots \end{array}$$

les valeurs successives de la quantité θ; et les conclusions que nous avons tirées de cette seule notation, s'ensuivent par un enchaînement des idées qu'il ne dépend plus de nous de supprimer ou de modifier en substance.

En résumé, l'existence des éléments que nous soumettons au calcul n'est pas susceptible d'être vérifiée par des moyens empiriques; mais elle est fondée sur la loi immuable de notre raison, et de plus elle se manifeste d'une manière incontestable dans les résultats que nous obtenons. Donc, elle offre le caractère de *vérité transcendante* proprement dite; et en conséquence nous qualifions de *calcul transcendant* l'ensemble des principes exposés ci-dessus.