Wielmożnemu Doktorowi
Szujskiemu, Sekretarzowi
Jeneralnemu Akademii
Umiejętności w Krakowie
w dowód szacunku
Autor
Tetmajer

FORMULES

POUR LE DÉVELOPPEMENT

DES FONCTIONS IMPLICITES,

Par J. TETMAYER.

PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES ET DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
RUE DU JARDINET, 12.

1853.

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

AVANT-PROPOS.

Je m'empresse d'offrir à MM. les géomètres deux nouvelles formules à l'aide desquelles on développe, avec une extrême facilité, toute fonction donnée par une équation non résolue. Ces formules renferment donc une solution générale d'un problème d'analyse dont un cas particulier seulement a été résolu par Lagrange.

La formation de l'équation $X + U = o$, qui définit la nature des racines et détermine la loi du développement, ne saurait être assujettie à une règle applicable généralement, puisque, dans une même hypothèse, cette équation peut le plus souvent recevoir plusieurs formes différentes. Les relations des paramètres donnés indiqueront la manière dont elle doit être établie pour qu'elle fournisse une série suffisamment convergente et en même temps la plus simple possible.

J'obtiens les formules par des considérations directes. Il en résulte une démonstration indépendante de tout artifice de calcul, et j'espère qu'elle satisfera pleinement l'esprit.

Paris, le 26 mars 1853.

FORMULES

POUR LE DÉVELOPPEMENT

DES FONCTIONS IMPLICITES.

Soit

$$(1) \qquad \varphi(x) = 0$$

l'équation donnée pour la détermination de x.

On pourra toujours la mettre sous la forme

$$(2) \qquad X + U = 0,$$

où je représente par X une fonction de x telle, que les racines de l'équation

$$X = 0$$

soient les limites vers lesquelles convergent autant de racines de l'équation (1), lorsque U tend à s'annuler.

Donc, si a est une racine de l'équation $X = 0$, la racine correspondante de l'équation (2) sera

$$x = a + \zeta,$$

ζ s'annulant avec U.

Pour établir une formule applicable au développement de la racine $a + \zeta$ dans tous les cas qui peuvent se présenter, je suppose d'abord la fonction x formée de telle manière que l'équation $X = 0$ n'ait pas de racines nulles ni infinies. Dans cette hypothèse, U sera généralement fonction de x.

Considérant ensuite l'équation (2) comme cas particulier de celle-ci

$$(3) \qquad X + zU = 0,$$

j'observe que zU s'annulant aussi bien pour $z = 0$ que pour $U = 0$, il faut qu'il en soit de même de ζ, ce qui exige que la série, quelle que soit sa forme d'ailleurs, procède suivant les puissances ascendantes de z qui a ici l'unité pour valeur.

Cela posé, je conclus

$$x = a + x'_0 + \frac{x''_0}{1.2} + \ldots \frac{x^{(n)}_0}{1.2\ldots n} + \int_0^1 \frac{(1-z)^n}{1.2\ldots n} x^{(n+1)}\, dz \quad [*],$$

et il ne reste plus qu'à trouver la loi des valeurs x'_0, x''_0,..., que prennent les dérivées de x pour $z = 0$.

Pour cela, remarquons que, dans la supposition $z = 0$, X et U deviennent fonctions de a, ce que je désignerai par X_a et U_a, et prenons, par rapport à z, la dérivée de l'équation (3). Il vient

$$(4) \qquad X'x' + zU'x' + U = 0;$$

d'où

$$x' = -\frac{U}{X'} - \frac{zU'}{X'}x',$$

et

$$x'_0 = -\frac{U_a}{X'_a}.$$

On peut écrire les dérivées ultérieures de x comme il suit :

$$x'' = -\frac{2U'X' - UX''}{X'^2}x' - zD_z\left[\frac{U'}{X'}x'\right],$$

$$x''' = -D_z\left[\frac{3U'X' - UX''}{X'^2}x'\right] - zD_z^2\left[\frac{U'}{X'}x'\right],$$

$$x^{\text{IV}} = -D_z^2\left[\frac{4U'X' - UX''}{X'^2}x'\right] - zD_z^3\left[\frac{U'}{X'}x'\right],$$

. . . .

$$x^{(n)} = -D_z^{n-2}\left[\frac{nU'X' - UX''}{X'^2}x'\right] - zD_z^{n-1}\left[\frac{U'}{X'}x'\right]:$$

---

[*] On parvient au même résultat en mettant l'équation (2) sous la forme

$$X + [z + (1-z)]U = 0,$$

et faisant $z = 0$ dans le développement de x ordonné suivant les puissances ascendantes de $1 - z$.

dont la dernière, à cause de

$$\frac{n\,\mathrm{U}'\mathrm{X}' - \mathrm{U}\mathrm{X}''}{\mathrm{X}'^2} = \frac{\left(\frac{\mathrm{U}^n}{\mathrm{X}'}\right)'}{\mathrm{U}^{n-1}},$$

peut aussi recevoir la forme

$$x^{(n)} = \mathrm{D}_z^{n-2}\left[\frac{\left(\frac{\mathrm{U}^n}{\mathrm{X}'}\right)'}{\mathrm{U}^{n-1}}\,x'\right] - z\theta,$$

θ désignant ce qui s'annule avec z.

Nous aurons, par conséquent, pour $n = 2$,

$$x'' = -\frac{\left(\frac{\mathrm{U}^2}{\mathrm{X}'}\right)'}{\mathrm{U}}\,x' - z\theta,$$

$$x''_0 = -\frac{\left(\frac{\mathrm{U}_a^2}{\mathrm{X}'_a}\right)'}{\mathrm{U}_a}\,x'_0,$$

et substituant à x'_0 sa valeur,

$$x''_0 = \frac{\left(\frac{\mathrm{U}_a^2}{\mathrm{X}'_a}\right)'}{\mathrm{X}'_a}.$$

Pour $n = 3$, il vient

$$x''' = -\left(\frac{\left(\frac{\mathrm{U}^3}{\mathrm{X}'}\right)'}{\mathrm{U}^2}\right)' x'^2 - \frac{\left(\frac{\mathrm{U}^3}{\mathrm{X}'}\right)'}{\mathrm{U}^2}\,x'' - z\theta,$$

$$x'''_0 = -\left(\frac{\left(\frac{\mathrm{U}_a^3}{\mathrm{X}'_a}\right)'}{\mathrm{U}_a^2}\right)' x_0'^{\,2} - \frac{\left(\frac{\mathrm{U}_a^3}{\mathrm{X}'_a}\right)'}{\mathrm{U}_a^2}\,x''_0;$$

et quand on remplace x'_0 et x''_0 par leurs valeurs, on obtient

$$x'''_0 = -\frac{\left(\frac{\left(\frac{\mathrm{U}_a^3}{\mathrm{X}'_a}\right)'}{\mathrm{U}_a^2}\right)' \frac{\mathrm{U}_a^2}{\mathrm{X}'_a} + \frac{\left(\frac{\mathrm{U}_a^3}{\mathrm{X}'_a}\right)'}{\mathrm{U}_a^2}\left(\frac{\mathrm{U}_a^2}{\mathrm{X}'_a}\right)'}{\mathrm{X}'_a},$$

$$x'''_0 = -\frac{\left(\frac{\left(\frac{\mathrm{U}_a^3}{\mathrm{X}'_a}\right)'}{\mathrm{X}'_a}\right)'}{\mathrm{X}'_a}.$$

D'après cela, on aurait pour $n = n$,

$$x_0^{(n)} = (-1)^n \frac{\left(\frac{\left(\frac{\left(\frac{U_a^n}{X'_a}\right)'}{X'_a}\right)'}{\vdots}\right)'}{X'_a}.$$

Vérifions ce résultat en déterminant directement ce que devient pour $z = 0$ la dérivée

$$x^{(n)} = -D_z^{n-2}\left[\frac{\left(\frac{U^n}{X'}\right)'}{U^{n-1}}\,x'\right] - z\theta.$$

Pour plus de simplicité, je ferai

$$\left(\frac{U^n}{X'}\right)' = Q.$$

Ayant égard à la valeur

$$x' = -\frac{U}{X'} + \frac{zU'U}{X'^2} - \frac{z^2U'^2U}{X'^3} + \ldots,$$

on trouve :

1°. En substituant cette expression de x' dans $x^{(n)}$,

$$x^{(n)} = D_z^{n-2}\left[\frac{Q}{U^{n-2}X'} - \frac{zQU'}{U^{n-2}X'^2} + \frac{z^2QU'^2}{U^{n-2}X'^3} - z^3\theta_1\right]:$$

2°. Différentiant, substituant de nouveau et réduisant,

$$x^{(n)} = D_z^{n-3}\left[\left(\frac{Q}{U^{n-2}X'}\right)'x' - \frac{QU'}{U^{n-2}X'^2} - z\left(\left(\frac{QU'}{U^{n-2}X'^2}\right)'x' - \frac{2QU'^2}{U^{n-2}X'^3}\right) + z^2\theta_2\right],$$

$$x^{(n)} = D_z^{n-3}\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\left(\frac{Q}{U^{n-2}X'}\right)'U + \frac{Q}{U^{n-2}X'}U'}{X'} \\ + z\left(\dfrac{\left(\frac{Q}{U^{n-2}X'}\right)'U + \frac{Q}{U^{n-2}X'}U'}{X'^2}U' + \dfrac{\left(\frac{QU'}{U^{n-2}X'^2}\right)'U + \frac{QU'}{U^{n-2}X'^2}U'}{X'}\right) - z^2\theta_3 \end{array}\right\},$$

$$x^{(n)} = D_z^{n-3}\left[-\frac{\left(\frac{Q}{U^{n-3}X'}\right)'}{X'} + z\left(\frac{\left(\frac{Q}{U^{n-3}X'}\right)'}{X'^2}U' + \frac{\left(\frac{QU'}{U^{n-3}X'^2}\right)'}{X'}\right) - z^2\theta_3\right];$$

3°. Répétant ces mêmes opérations,

$$x^{(n)} = \mathrm{D}_z^{n-4}\left[-\left(\frac{\left(\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{U}^{n-3}\,\mathrm{X}'}\right)'}{\mathrm{X}'}\right)'x' + \frac{\left(\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{U}^{n-3}\,\mathrm{X}'}\right)'}{\mathrm{X}'^2}\mathrm{U}' + \frac{\left(\frac{\mathrm{QU}'}{\mathrm{U}^{n-3}\,\mathrm{X}'^2}\right)'}{\mathrm{X}'} + z\theta_4\right],$$

$$x^{(n)} = \mathrm{D}_z^{n-4}\left[\frac{\left(\frac{\left(\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{U}^{n-3}\,\mathrm{X}'}\right)'}{\mathrm{X}}\right)'\mathrm{U} + \frac{\left(\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{U}^{n-3}\,\mathrm{X}'}\right)'}{\mathrm{X}'}\mathrm{U}' + \left(\frac{\frac{\mathrm{QU}'}{\mathrm{U}^{n-3}\,\mathrm{X}'}}{\mathrm{X}'}\right)'}{\mathrm{X}'} - z\theta_5\right],$$

$$x^{(n)} = \mathrm{D}_z^{n-4}\left[\frac{\left(\frac{\left(\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{U}^{n-3}\,\mathrm{X}'}\right)'\mathrm{U} + \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{U}^{n-3}\,\mathrm{X}'}\mathrm{U}'}{\mathrm{X}'}\right)'}{\mathrm{X}'} - z\theta_5\right],$$

$$x^{(n)} = \mathrm{D}_z^{n-4}\left[\frac{\left(\frac{\left(\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{U}^{n-4}\,\mathrm{X}'}\right)'}{\mathrm{X}'}\right)'}{\mathrm{X}'} - z\theta_5\right].$$

D'où l'on voit, qu'après $n - 4$ différentiations qui restent à faire, U disparaîtra, et qu'on aura

$$x^{(n)} = (-1)^n \frac{\left(\frac{\left(\frac{\left(\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{X}'}\right)'}{\mathrm{X}'}\right)'}{\vdots}\right)'}{\mathrm{X}'} + z\theta,$$

où θ désigne tout ce qui s'annule avec z.

Restituons maintenant à Q sa valeur, et faisons $z = 0$; nous aurons

$$x_0^{(n)} = (-1)^n \frac{\left(\frac{\left(\frac{\left(\frac{\mathrm{U}_a^n}{\mathrm{X}'_a}\right)'}{\mathrm{X}'_a}\right)'}{\vdots}\right)'}{\mathrm{X}'_a},$$

comme ci-dessus.

Le terme général de la série sera, par conséquent,

$$(-1)^n \frac{\left(\frac{\left(\frac{\left(\frac{\mathrm{U}_a^n}{\mathrm{X}'_a}\right)'}{2\,\mathrm{X}'_a}\right)'}{\vdots}\right)'}{n\,\mathrm{X}'_a};$$

et l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{(1-z)^n}{1.2\ldots n} x^{(n+1)}\, dz,$$

qui exprime son reste, devient

$$-\int_0^1 \frac{(1-z)^n}{1.2\ldots n} D_z^n\left[\frac{U}{X'+zU'}\right] dz,$$

lorsqu'on y porte la valeur qu'offre pour x' l'équation (4).

Nous obtenons ainsi, pour le développement de la racine $a+\zeta$, définie par l'équation (2), cette formule très-simple

$$x = a - \frac{U_a}{X'_a} + \frac{\left(\frac{U_a^2}{X'_a}\right)'}{2X'_a} - \ldots + (-1)^n \frac{\left(\frac{\left(\frac{\left(\frac{U_a^n}{X'_a}\right)'}{2X'_a}\right)'}{\vdots}\right)'}{nX'_a}$$
$$-\int_0^1 \frac{(1-z)^n}{1.2\ldots n} D_z^n\left[\frac{U}{X'+zU'}\right] dz.$$

Quand on écrit le reste de la série comme il suit :

$$-\frac{1}{1.2\ldots(n+1)}\int_0^1 D_z^n\left[\frac{U}{X'+zU'}\right](n+1)(1-z)^n\, dz,$$

et qu'on suppose $n=0$, la formule donne

$$x = a - \int_0^1 \frac{U}{X'+zU'}\, dz$$

pour expression de la valeur de x qu'on considère.

Au moyen de ce qui précède, on établit très-aisément une autre formule, qui donne le développement d'une fonction quelconque $F(x)$ de la racine

$$x = a - \int_0^1 \frac{U}{X'+zU'}\, dz.$$

La série sera évidemment de la forme

$$F(x) = F_a + D_z F_a + \frac{D_z^2 F_a}{1.2} + \ldots + \frac{D_z^n F_a}{1.2\ldots n} + \int_0^1 \frac{(1-z)^n}{1.2\ldots n} D_z^{n+1} F(x)\, dz,$$

où F_a, $D_z F_a, \ldots$, désignent les valeurs qu'acquièrent $F(x)$ et ses dérivées prises par rapport à z, lorsque pour $z = 0$ elles deviennent fonctions de a.

Pour trouver la loi de ces valeurs, déterminons la dérivée $D_z^n F(x)$. On aura d'abord

$$D_z F(x) = F'(x)\, x',$$

et, par suite de $x' = -\dfrac{U}{X'} - \dfrac{zU'}{X'} x'$,

$$D_z F(x) = -\frac{F'(x)\,U}{X'} - \frac{z\,F'(x)\,U'}{X'} x'.$$

Faisons maintenant, pour abréger, $F'(x) = F'$, et, en suivant la même marche que ci-dessus, écrivons

$$D_z^2 F(x) = -\frac{(2F'U' + F''U)X' - F'UX''}{X'^2} x' - zD_z\left[\frac{F'U'}{X'} x'\right],$$

$$D_z^3 F(x) = -D_z\left[\frac{(3F'U' + F''U)X' - F'UX''}{X'^2} x'\right] - zD_z^2\left[\frac{F'U'}{X'} x'\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$D_z^n F(x) = -D_z^{n-2}\left[\frac{(nF'U' + F''U)X' - F'UX''}{X'^2} x'\right] - zD_z^{n-1}\left[\frac{F'U'}{X'} x'\right].$$

Il en résulte que

$$D_z^n F(x) = -D_z^{n-2}\left[\frac{\left(\dfrac{F'U^n}{X'}\right)'}{U^{n-1}} x'\right] - z\theta.$$

Donc, si dans la formule

$$(-1)^n \frac{\left(\dfrac{\left(\dfrac{\left(\dfrac{Q}{X'}\right)'}{X'}\right)'}{\vdots}\right)'}{X'} + z\theta,$$

établie plus haut, on remplace Q par $\left(\dfrac{F'U^n}{X'}\right)'$, et qu'on fasse ensuite $z = 0$, on aura

$$D_z^n F_a = (-1)^n \frac{\left(\dfrac{\left(\dfrac{\left(\dfrac{F'_a U_a^n}{X'_a}\right)'}{X'_a}\right)'}{\vdots}\right)'}{X_a};$$

ce qui donne, pour le développement de la fonction $\mathrm{F}(x)$, la formule

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}_a - \frac{\mathrm{F}'_a \mathrm{U}_a}{\mathrm{X}'_a} + \frac{\left(\frac{\mathrm{F}'_a \mathrm{U}^2_a}{\mathrm{X}'_a}\right)'}{2\mathrm{X}'_a} - \ldots + (-1)^n \frac{\left(\left(\frac{\left(\frac{\mathrm{F}'_a \mathrm{U}^n}{\mathrm{X}'_a}\right)'}{2\mathrm{X}'_a}\right)'\right)'}{\vdots \atop n\mathrm{X}'_a}$$

$$-\int_0^1 \frac{(1-z)^n}{1.2\ldots n} \mathrm{D}^n_z \left[\frac{\mathrm{F}'\mathrm{U}}{\mathrm{X}' + z\mathrm{U}'}\right] dz.$$

La supposition $\mathrm{F}(x) = x$ réduit cette formule à la précédente ; mais, pour plus de commodité dans les applications, il importe de conserver séparément les deux formules.

Quand il y aura lieu de développer x en série double, on les emploiera conjointement.

Lorsque X est de la forme $x + a$, et que U représente une fonction telle que $t\varphi(x)$, elles donnent les deux séries de Lagrange, qui deviennent désormais tout à fait inutiles, parce qu'elles ne simplifient aucunement l'opération pour le cas particulier qu'elles concernent.

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.