Wielmożnemu Doktorowi Szujskiemu
Sekretarzowi Jeneralnemu Akademii
umiejętności w Krakowie &c
w dowód szacunku
Autor.
Tetmajer

THÉORÈME GÉNÉRAL

SUR LA

CONVERGENCE DES SÉRIES,

Par J. TETMAYER DE PRZERWA,

PARIS,
MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Augustins, 55.

1858

THÉORÈME GÉNÉRAL

SUR LA

CONVERGENCE DES SÉRIES.

THÉORÈME.

Si, à partir d'un certain rang, les termes d'une série

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots u_n + \ldots$$

sont de même signe, et si de plus chacun est inférieur à celui qui le précède immédiatement, la série sera convergente ou divergente, suivant qu'on aura

$$\frac{2\,u_{2^{n+1}}}{u_{2^n}} < \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

ou

$$\frac{2\,u_{2^{n+1}}}{u_{2^n}} > \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

en attribuant à n une valeur aussi grande qu'on veut.

Démonstration. — Comme les termes de la série

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

conformément à l'hypothèse admise, vont en décroissant, on aura

$$u_1 = u_1,$$
$$2\,u_2 > u_2 + u_3,$$
$$4\,u_4 > u_4 + u_5 + u_6 + u_7,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et ajoutant

$$U_1 = u_1 + 2u_2 + 4u_4 + \ldots + 2^n u_{2^n} + \ldots > u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots.$$

On aura, par la même raison,

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= u_1 + u_2, \\ 2u_4 &< u_3 + u_4, \\ 4u_8 &< u_5 + u_6 + u_7 + u_8, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$U_2 = u_1 + u_2 + 2u_4 + 4u_8 + \ldots + 2^{n-1} u_{2^n} + \ldots < u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots.$$

Or, en écrivant ces deux séries comme il suit :

$$\begin{aligned} U_1 &= u_1 + 2(u_2 + 2u_4 + 4u_8 + \ldots + 2^{n-1} u_{2^n} + \ldots), \\ U_2 &= u_1 + 1(u_2 + 2u_4 + 4u_8 + \ldots + 2^{n-1} u_{2^n} + \ldots), \end{aligned}$$

on voit qu'elles seront en même temps convergentes ou divergentes. Et elles entraîneront évidemment la convergence ou la divergence de la série U, puisque les portions successives

$$\begin{matrix} u_2 + u_3, & u_4 + u_5 + u_6 + u_7, & \ldots, \\ u_3 + u_4, & u_5 + u_6 + u_7 + u_8, & \ldots \end{matrix}$$

de cette dernière, sont les unes inférieures aux termes de la série U_1 et les autres supérieures aux termes de la série U_2.

Dans les séries U_1 et U_2 le rapport de deux termes consécutifs est

$$\frac{2u_{2^{n+1}}}{u_{2^n}}.$$

Relativement à la proposée U, nous nommerons *série auxiliaire* la série U_1.

Etablissons maintenant une série pareille en partant de celle U_1. Pour cela il suffit d'observer qu'on détermine le terme général

$$2^n u_{2^n}$$

de cette dernière, en changeant n en 2^n dans u_n et multipliant le résultat par 2^n. Car, lorsqu'on effectue la même opération sur $2^n u_{2^n}$, il vient

$$2^n 2^{2^n} u_{2^{2^n}},$$

ce qui donne la série

$$U_{11} = 2u_2 + 2.4u_4 + 4.16u_{16} + 8.256u_{256} + \ldots,$$

dont les termes répondent aux groupes de termes

$$\begin{array}{l} 2u_2, \\ 4u_4 + 8u_8, \\ 16u_{16} + 32u_{32} + 64u_{64} + 128u_{128}, \\ 256u_{256} + 512u_{512} + \ldots + 32768u_{32768}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

de la série U_1, formés d'après la même loi qui détermine les groupes

$$\begin{array}{l} u_1, \\ u_2 + u_3, \\ u_4 + u_5 + u_6 + u_7, \\ u_8 + u_9 + \ldots u_{15}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

auxquels répondent les termes de cette série.

Il résulte d'ailleurs de ce qui précède que, si l'on trouve que la série U_{11} soit convergente ou qu'elle ne le soit pas, il en sera certainement de même de celles U_1 et U.

En opérant sur

$$2^n 2^{2^n} u_{2^{2^n}}$$

de la même manière que ci-dessus, on obtient le terme général

$$2^n 2^{2^n} 2^{2^{2^n}} u_{2^{2^{2^n}}},$$

qui fournit une nouvelle série auxiliaire U_{111}.

Mais observons que les rapports

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}, \qquad \frac{2\,u_{2^{n+1}}}{u^{2^n}}$$

étant des fonctions essentiellement différentes, il faut qu'on ait

$$\frac{2\,u_{2^{n+1}}}{u_{2^n}} < \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

ou

$$\frac{2\,u_{2^{n+1}}}{u_{2^n}} > \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

pour les grandes valeurs de n, quand bien même ces rapports tendraient alors vers une même limite k.

Or, si u_n est tel qu'à partir d'une certaine valeur de n on a constamment

$$\frac{2\,u_{2^{n+1}}}{u_{2^n}} < \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

les termes de la série U_1 finiront par décroître plus rapidement que ceux de la série U; et il en résultera

$$2^p\,u_{2^p} < u_p.$$

Ceci entraîne

$$2^p\,2^{2^p}\,u_{2^{2^p}} < 2^p\,u_{2^p};$$

et comme cette inégalité s'accroît pour $p + 1$, on en conclut

$$\frac{2 . 2^p\,u_{2^{2^{p+1}}}}{u_{2^{2^p}}} < \frac{2\,u_{2^{p+1}}}{u_{2^p}}.$$

Donc, à partir de $n = p$, les termes de la série U_{11} décroîtront plus rapidement encore que ceux de la série U_1; et ainsi de suite.

Donc, dans ce cas, en partant de la série U, on pourra établir une série auxiliaire W telle qu'on ait

$$w_{n+1} < w_n, \qquad w_{n+2} < w_{n+1}\frac{w_{n+1}}{w_n},$$

et par suite

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} < 1, \qquad \frac{w_{n+2}}{w_{n+1}} < \frac{w_{n+1}}{w_n}$$

depuis $n = p$ jusqu'à $n = \infty$. Cette série sera donc convergente. Et par conséquent, la série U le sera aussi.

Et si, au contraire, en attribuant toujours une très-grande valeur à n, on trouve

$$\frac{2u_{2^{n+1}}}{u_{2^n}} > \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

d'où résultera

$$2^p u_{2^p} > u_p,$$

il est clair par ce qui précède qu'on aboutira alors à une série auxiliaire W où l'on aura

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} > 1$$

depuis $n = p$ jusqu'à $n = \infty$, et qui sera, par conséquent, divergente. Donc la série U le sera aussi.

Donc, etc.

Exemple. — La série

$$\frac{1}{2\log^\beta 2} + \frac{1}{3\log^\beta 3} + \frac{1}{4\log^\beta 4} + \ldots \frac{1}{n\log^\beta n} + \ldots$$

donne

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n\log^\beta n}{(n+1)\log^\beta(n+1)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{\beta}{n\log n} + \ldots},$$

$$\frac{2u_{2^{n+1}}}{u_{2^n}} = \frac{\log^\beta(2^n)}{\log^\beta(2^{n+1})} = \frac{1}{1 + \frac{\beta}{n} + \frac{\beta(\beta-1)}{2n^2} + \ldots};$$

et pour une très-grande valeur de n, on a évidemment

$$\frac{1}{1+\frac{\beta}{n}+\frac{\beta(\beta-1)}{2n^2}+\ldots} < \frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{\beta}{n\log n}+\ldots}$$

quand $\beta > 1$, et

$$\frac{1}{1+\frac{\beta}{n}+\frac{\beta(\beta-1)}{2n^2}+\ldots} > \frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{\beta}{n\log n}+\ldots},$$

lorsque $\beta = 1$ ou < 1. Donc cette série est convergente pour $\beta > 1$ et divergente pour $\beta = 1$ ou < 1.

Le rapport de deux termes consécutifs tend ici vers l'unité, puisque

$$\lim \frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{\beta}{n\log n}+\ldots} = 1;$$

et la règle

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha}, \qquad \lim n\alpha = k,$$

destinée particulièrement à ce cas, ne nous apprend rien ; car il vient encore

$$k = \lim\left(1+\frac{\beta}{\log n}+\ldots\right) = 1.$$

SCOLIE I. — Il résulte du théorème ci-dessus qu'à partir d'une valeur suffisamment grande de n, on aura constamment

$$2^n u_{2^n} < u_n,$$

si la série U est convergente, et inversement

$$2^n u_{2^n} > u_n,$$

si elle est divergente. Donc, au lieu des rapports

$$\frac{2u_{2^{n+1}}}{u_{2^n}}, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

on peut comparer les termes généraux

$$2^n u_{2^n}, \qquad u_n,$$

lorsque les expressions de ces derniers s'y prêtent mieux.

SCOLIE II. — On constate, par des considérations plus simples, la convergence d'une série qui tombe dans un des trois cas :

1°. $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = r,$$

2°. $$1 > \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}},$$

3°. $$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}, \qquad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1.$$

Notre théorème servira donc principalement au cas

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}, \qquad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$$

qui n'a pas encore reçu d'autre solution générale.

COROLLAIRE I. — Au moyen de ce qui précède, on peut toujours constater le caractère d'une série

$$V = v_1 + v_2 - v_3 + v_4 + \ldots \pm v_u \pm \ldots,$$

dans laquelle les signes des termes varient suivant une certaine loi. Car, pour cela il suffit évidemment de grouper ici les termes de manière que les groupes successifs soient tous positifs ou tous négatifs et que celui de l'indice n définisse la série V.

Quand le groupe général se composera de m termes, il prendra la forme

$$v_{nm-m+1} + v_{nm-m+2} - v_{nm-m+3} + \ldots \pm v_{nm}.$$

SCOLIE. — On peut se dispenser de grouper les termes de la série V :

1°. Quand, en prenant positivement tous ses termes, on obtient une série convergente;

2°. Lorsque ses termes étant alternativement positifs et négatifs, décroissent constamment et indéfiniment, parce que la convergence d'une telle série résulte déjà de sa forme;

3°. Lorsque les termes de la série V décroissent comme il vient d'être dit, et que de plus le groupe général en contiendrait m positifs et m négatifs. Car alors la série V sera décomposable en m séries ayant leurs termes alternativement positifs et négatifs, et qui seront toutes convergentes.

Corollaire II. — Soit

$$a_1\, a_2\, a_3 \ldots\ldots a_n \ldots,$$

un produit composé d'un nombre infini de facteurs. En l'écrivant comme il suit

$$[1 + (a_1 - 1)][1 + (a_2 - 1)] \ldots [1 + (a_n - 1)] \ldots,$$

et effectuant les multiplications successives, on obtient

$$a_1\, a_2\, a_3 \ldots\ldots a_n \ldots = a_1 + a_1 (a_2 - 1) + a_1\, a_2 (a_3 - 1) + \ldots$$

$$+ a_1\, a_2 \ldots a_{n-1} (a_n - 1) + \ldots.$$

Donc le produit

$$a_1\, a_2\, a_3 \ldots\ldots a_n \ldots,$$

et la série qui a pour terme général

$$a_1\, a_2\, a_3 \ldots\ldots a_{n-1} (a_n - 1)$$

tendent vers une même limite finie, ou croissent l'un et l'autre au delà de toute valeur assignable.

Donc, à l'aide des règles qui font connaître la convergence ou la divergence d'une série, on établira le caractère de tout produit composé d'un nombre infini de facteurs.

Observation. — En introduisant dans les deux derniers scolies les démonstrations des cas qui s'y trouvent mentionnés seulement, on aura un ensemble des règles très-suffisantes pour la solution des questions relatives à la convergence des séries réelles.

Paris. — Imprimerie de Mallet-Bachelier, rue du Jardinet, 12.