Widmo znemu Ś. P. Szujskiemu
Sekretarzowi Jeneralnemu Akademii
Umiejętności, &c &c
w dowód szacunku
J. P. Tetmajer

ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ TRZECHWYRAZOWYCH

PRZEZ

JÓZEFA Przerwę TETMAJERA.

Inwentarz
L. 2506
Dział
L. p. 2215-04
2 1 4/VII

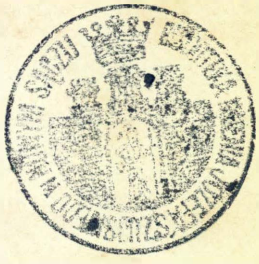
KRAKÓW,
W DRUKARNI UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
pod zarządem Ignacego Stelcla.
1879.

ROZWIĄZANIE

RÓWNAŃ TRZECHWYRAZOWYCH

PRZEZ

JÓZEFA Przerwę TETMAJERA.



219/VII

KRAKÓW,
W DRUKARNI UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
pod zarządem Ignacego Stelcla.
1879.

Biblioteka Publiczna im. Józefa Szujskiego w Nowym Sączu
ZBIORY ZABYTKOWE
nr inw. 11 821 51

Osobne odbicie z „Pamiętnika Akademii Umiejętności w Krakowie“ Wydz. matem.-przyr. T. V.

Akc. 578 2018

ROZWIĄZANIE

równań trzechwyrazowych.

WSTĘP.

Teoryja rozwinięcia funkcyj niewyraźnych zawiéra rozwiązanie równań trzechwyrazowych. [1])

Tam to owe trzy wzory szczególne, wyrażające piérwiastki tychże równań, wyprowadzone są z ogólnego wzoru, który daje wartość jakiéjkolwiek funkcyi niewyraźnéj. Jest on dla funkcyj niewyraźnych tém samém, czém są dla funkcyj wyraźnych wzory TAYLORA i MACLAURENA.

Ten atoli wzór ogólny ustanowionym jest za pomocą rachunku różniczkowego. I dla tego w mowie będące trzy szczególne wzory, dane jak to w teoryi rozwinięcia funkcyj niewyraźnych uskutecznioném zostało, do niższéj algiebry wprowadzone być nie mogą.

Zaprzeczyć téż nie można, że w rachunku codziennym wydarza się często potrzeba rozwiązania jakiegoś równania trzechwyrazowego. Z tego więc powodu zdawało mi się rzeczą niezbędnie potrzebną przenieść rozwiązanie tych równań na pole niższéj algiebry.

Do ustanowienia wzorów używam powszechnie znanego wzoru NEWTONA. Jestto rachunek nierównie dłuższy, ale ściśle elementarny. Nie sprowadza téż żadnéj dalszéj niedogodności, bo przy użyciu wzoru powtarzanym nie będzie.

W krótkich słowach te tylko wykazuję warunki zbieżności szeregów, które bezpośrednie otrzymują zastósowanie.

Ponieważ piérwiastki wielokrotne dają się wyprowadzić z równań pochodnych, które tu są dwuwyrazowe, poprzestałem na téj wskazówce w teoryi rozwinięcia funkcyj niewyraźnych. Teraz zaś idę daléj. Wykazuję jakie wtedy są znaki wyrazów i w każdém przypuszczeniu piérwiastek wielokrotny wyznaczam.

---

[1]) Pamiętnik Akademii Umiejętności w Krakowie. Wydz. matem.-przyrodn. T. III, str. 155—188 i T. IV str. 1—62.

Ażeby zbieżność szczególnych szeregów, wyrażających w takim razie jednokrotne piérwiastki, jaknajjaśniéj okazać, uwzględniam z osobna każdy z tych trzech wzorów. Dołączam nakoniec sposób obliczenia piérwiastków rzeczywistych i urojonych, które wtedy dane równanie zawiérać może.

Winienem jeszcze wskazać miejsce, które najstósowniéj zająć może w nauce obecne rozwiązanie równań trzechwyrazowych. Każde dzieło trygonometryi zawiéra twierdzenie MOIVRA i z niego wynikające rozwiązanie równań dwuwyrazowych, których znowu bezpośredniém następstwem jest rozwiązanie równań trzechwyrazowych. Tak zbogacona trygonometryja nie tylko dostarczy nowego dogodnego narzędzia do praktycznego rachunku, ale oraz rozwiązanie równań dwuwyrazowych, dotąd tak mało w tym rachunku użyteczne, a które tu w każdym przypadku daje ilość piérwiastków rzeczywistych i urojonych, do wysokiéj wartości podniesie.

Kraków, 10 Stycznia 1879 r.

1. Wszelkie równanie trzechwyrazowe może być tak wyrażoném

(1) $$x^{\alpha} + px^{\beta} + q = 0.$$

Przypuszczam oraz, że współczynniki p i q są ilościami rzeczywistemi.
I kładę najprzód

$$x = (-q - px^{\beta})^{\frac{1}{\alpha}} ;$$

a ten dwumian rozwijając według wzoru NEWTONA, otrzymuję szereg następujący:

$$x = (-q)^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{px^{\beta}}{\alpha(-q)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} - \frac{(\alpha-1)p^2x^{2\beta}}{1.2\alpha^2(-q)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}}} - \frac{(\alpha-1)(2\alpha-1)p^3x^{3\beta}}{1.2.3\,\alpha^3(-q)^{\frac{3\alpha-1}{\alpha}}} - \frac{(\alpha-1)(2\alpha-1)(3\alpha-1)p^4x^{4\beta}}{1.2.3.4\,\alpha^4(-q)^{\frac{4\alpha-1}{\alpha}}} \ldots\ldots$$

z którego ciągłém podstawianiem coraz więcéj przybliżonych wartości ruguję nieznaną x.

1) Dla $x = (-q)^{\frac{1}{\alpha}}$

będzie

$$x = (-q)^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{p}{\alpha(-q)^{\frac{\alpha-\beta-1}{\alpha}}} - \ldots\ldots$$

a przeto

$$x^{\beta} = (-q)^{\frac{\beta}{\alpha}} - \frac{\beta q}{\alpha(-q)^{\frac{\alpha-2\beta}{\alpha}}} \ldots\ldots;$$

$$x^{2\beta} = (-q)^{\frac{2\beta}{\alpha}} \ldots\ldots\ldots;$$

więc

$$-\frac{px^{\beta}}{\alpha(-q)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} = -\frac{p}{\alpha(-q)^{\frac{\alpha-\beta-1}{\alpha}}} + \frac{\beta p^2}{\alpha^2(-q)^{\frac{2\alpha-2\beta-1}{\alpha}}} \ldots\ldots$$

$$-\frac{(\alpha-1)p^2x^{2\beta}}{1.2\alpha^2(-q)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}}} = -\frac{(\alpha-1)p^2}{1.2\alpha^2(-q)^{\frac{2\alpha-2\beta-1}{\alpha}}} \ldots\ldots$$

a zatém 2)

$$x = (-q)^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{p}{\alpha(-q)^{\frac{\alpha-\beta-1}{\alpha}}} - \frac{(\alpha-2\beta-1)p^2}{1.2\alpha^2(-q)^{\frac{2\alpha-2\beta-1}{\alpha}}} \ldots\ldots$$

Dla powyższych trzech wyrazów będzie zaś

$$x^{\beta} = (-q)^{\frac{\beta}{\alpha}} - \frac{\beta p}{\alpha(-q)^{\frac{\alpha-2\beta}{\alpha}}} - \frac{\beta(\alpha-3\beta)p^2}{1.2\,\alpha^2(-q)^{\frac{2\alpha-3\beta}{\alpha}}} \cdots\cdots$$

$$x^{2\beta} = (-q)^{\frac{2\beta}{\alpha}} - \frac{2\beta p}{\alpha(-q)^{\frac{\alpha-3\beta}{\alpha}}} \cdots\cdots$$

$$x^{3\beta} = (-q)^{\frac{3\beta}{\alpha}} \cdots\cdots;$$

więc

$$-\frac{px^{\beta}}{\alpha(-q)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{\beta(\alpha-3\beta)p^3}{1.2\,\alpha^3(-q)^{\frac{3\alpha-3\beta-1}{\alpha}}} \cdots\cdots$$

$$-\frac{(\alpha-1)p^2x^{2\beta}}{1.2\,\alpha^2(-q)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}}} = \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{2\beta(\alpha-1)p^3}{1.2\,\alpha^3(-q)^{\frac{3\alpha-3\beta-1}{\alpha}}} \cdots\cdots$$

$$-\frac{(\alpha-1)(2\alpha-1)p^3x^{3\beta}}{1.2.3\,\alpha^3(-q)^{\frac{3\alpha-1}{\alpha}}} = -\frac{(\alpha-1)(2\alpha-1)p^3}{1.2.3\,\alpha^3(-q)^{\frac{3\alpha-3\beta-1}{\alpha}}} \cdots\cdots;$$

a te ostatnie ułamki sprowadzone do jednego mianownika czynią razem:

$$(9\alpha\beta - 9\beta^2 - 6\beta - 2\alpha^2 + 3\alpha - 1)\frac{p^3}{1.2.3\alpha^3(-q)^{\frac{3\alpha-3\beta-1}{\alpha}}} = \frac{(\alpha-3\beta-1)(2\alpha-3\beta-1)p^3}{1.2.3\,\alpha^3(-q)^{\frac{3\alpha-3\beta-1}{\alpha}}},$$

I tak mamy 3)

$$x = (-q)^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{p}{\alpha(-q)^{\frac{\alpha-\beta-1}{\alpha}}} - \frac{(\alpha-2\beta-1)p^2}{1.2\alpha^2(-q)^{\frac{2\alpha-2\beta-1}{\alpha}}} - \frac{(\alpha-3\beta-1)(2\alpha-3\beta-1)p^3}{1.2.3\,\alpha^3(-q)^{\frac{3\alpha-3\beta-1}{\alpha}}} \cdots\cdots\cdots$$

Biorąc teraz te cztéry wyrazy otrzymujemy następnie

$$x^{\beta} = (-q)^{\frac{\beta}{\alpha}} - \frac{\beta p}{\alpha(-q)^{\frac{\alpha-2\beta}{\alpha}}} - \frac{\beta(\alpha-3\beta)p^2}{1.2.\alpha^2(-q)^{\frac{2\alpha-3\beta}{\alpha}}} - \frac{\beta(2\alpha^2-12\alpha\beta+16\beta^2)p^3}{1.2.3\,\alpha^3(-q)^{\frac{3\alpha-4\beta}{\alpha}}} \cdots\cdots\cdots$$

$$x^{2\beta} = (-q)^{\frac{2\beta}{\alpha}} - \frac{2\beta p}{\alpha(-q)^{\frac{\alpha-3\beta}{\alpha}}} - \frac{2\beta(\alpha-4\beta)p^2}{1.2.\alpha^2(-q)^{\frac{2\alpha-4\beta}{\alpha}}} \cdots\cdots$$

$$x^{3\beta} = (-q)^{\frac{3\beta}{\alpha}} - \frac{3\beta p}{\alpha(-q)^{\frac{\alpha-4\beta}{\alpha}}} \cdots\cdots$$

$$x^{4\beta} = (-q)^{\frac{4\beta}{\alpha}} \cdots\cdots;$$

więc

$$-\frac{px^{\beta}}{\alpha(-q)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} = \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\beta(2\alpha^2-12\alpha\beta+16\beta^2)p^4}{1.2.3\alpha^4(-q)^{\frac{4\alpha-4\beta-1}{\alpha}}} \ldots\ldots$$

$$-\frac{(\alpha-1)p^2x^{2\beta}}{1.2\alpha^2(-q)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}}} = \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\beta(\alpha-1)(\alpha-4\beta)p^4}{1.2.\alpha^4(-q)^{\frac{4\alpha-4\beta-1}{\alpha}}} \ldots\ldots$$

$$-\frac{(\alpha-1)(2\alpha-1)p^3x^{3\beta}}{1.2.3\alpha^3(-q)^{\frac{3\alpha-1}{\alpha}}} = \ldots\ldots\ldots + \frac{\beta(\alpha-1)(2\alpha-1)p^4}{1.2\alpha^4(-q)^{\frac{4\alpha-4\beta-1}{\alpha}}} \ldots\ldots$$

$$-\frac{(\alpha-1)(2\alpha-1)(3\alpha-1)p^4x^{4\beta}}{1.2.3.4\alpha^4(-q)^{\frac{4\alpha-1}{\alpha}}} = -\frac{(\alpha-1)(2\alpha-1)(3\alpha-1)p^4}{1.2.3.4\alpha^4(-q)^{\frac{4\alpha-4\beta-1}{\alpha}}} \ldots\ldots$$

co nam daje

$$(44\alpha^2\beta - 96\alpha\beta^2 - 48\alpha\beta + 64\beta^3 + 48\beta^2 + 12\beta - 6\alpha^3 + 11\alpha^2 - 6\alpha + 1)\frac{p^4}{1.2.3.4\alpha^4(-q)^{\frac{4\alpha-4\beta-1}{\alpha}}}$$

$$= -\frac{(\alpha-4\beta-1)(2\alpha-4\beta-1)(3\alpha-4\beta-1)p^4}{1.2.3.4\alpha^4(-q)^{\frac{4\alpha-4\beta-1}{\beta}}},$$

a tak prawo, według którego postępują wyrazy szeregu, staje się już oczywistém i daje nam wzór następujący:

$$(A)\quad x = (-q)^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{p}{\alpha(-q)^{\frac{\alpha-\beta-1}{\alpha}}} - \frac{(\alpha-2\beta-1)p^2}{1.2\alpha^2(-q)^{\frac{2\alpha-2\beta-1}{\alpha}}} - \frac{(\alpha-3\beta-1)(2\alpha-3\beta-1)p^3}{1.2.3\alpha^3(-q)^{\frac{3\alpha-3\beta-1}{\alpha}}}$$

$$- \frac{(\alpha-4\beta-1)(2\alpha-4\beta-1)(3\alpha-4\beta-1)p^4}{1.2.3.4\alpha^4(-q)^{\frac{4\alpha-4\beta-1}{\alpha}}} - \ldots\ldots$$

$$- \frac{(\alpha-n\beta-1)(2\alpha-n\beta-1)\ldots((n-1)\alpha-n\beta-1)p^n}{1.2.3.4\ldots n\alpha^n(-q)^{\frac{n\alpha-n\beta-1}{\alpha}}} - R_{n+1}$$

2. Kiedy można wykazać zbieżny postęp jeometryczny, którego wyrazy od pewnego miejsca pozostają ciągle większémi od wyrazów szeregu

$$S = t_0 + t_1 + t_2 + \ldots t_n + r_{n+1},$$

szereg S jest także zbieżnym.

Do wyznaczenia tego postępu jeometrycznego używamy ilości

$$\sqrt[n]{t_n}$$

i badamy jéj po sobie następujące zmiany, jakotéż granicę, do któréj ona dąży dla coraz większych wartości wskazówki n. Gdy na granicy ∞, znajdujemy

$$\lim \sqrt[n]{t_n} = k < 1$$

szereg jest zawsze zbieżnym.

Jeżeli bowiem

1)

$$\sqrt[p]{t_p} > \sqrt[p+1]{t_{p+1}} > \sqrt[p+2]{t_{p+2}} > \ldots\ldots$$

dojdziemy koniecznie do wyrazu t_q, w którym będzie

$$\sqrt[q]{t_q} < 1;$$

ponieważ $\lim \sqrt[n]{t_n} < 1$; a biorąc tę wartość za prawidło w mowie będącego postępu jeometrycznego, będziemy mieli

$$t_q\sqrt[q]{t_q} + t_q\left(\sqrt[q]{t_q}\right)^2 + t_q\left(\sqrt[q]{t_q}\right)^3 + \ldots > t_{q+1} + t_{q+2} + t_{q+3} + \ldots;$$

a zatém

$$\frac{t_{n+1}}{1-\sqrt[q]{t_q}} > r_{n+1}.$$

Jeżeli zaś

$$\sqrt[p]{t_p} < \sqrt[p+1]{t_{p+1}} < \sqrt[p+2]{t_{p+2}} < \ldots\ldots,$$

granica

$$\lim \sqrt[n]{t_n} = k < 1$$

jest najwyższą wartością, do któréj rosnąc dąży ilość $\sqrt[n]{t_n}$; i będzie przeto

$$t_p k + t_p k^2 + t_p k^3 + \ldots > t_{p+1} + t_{p+2} + t_{p+3} + \ldots,$$

$$\frac{t_{n+1}}{1-k} > r_{n+1}.$$

Że atoli w obu tych przypadkach możemy granicę wyższą reszty r_{n+1} uczynić tak małą jak chcemy, biorąc n dostatecznie wielkiém, szereg S będzie zawsze zbieżnym.

I tém pewniéj będzie takim, jeżeli zawiéra wyrazy dodatne i wyrazy odjemne; wtedy bowiem, oznaczając przez r'_{n+1} resztę jego, będzie zawsze $r'_{n+1} < r_{n+1}$.

Z tegoż samego powodu będą zbieżne owe dwa szeregi, które daje rozwinięcie jakiejkolwiek funkcyi urojonéj.

3. W liczniku wyrazu ogólnego

$$T_n = \frac{(\alpha-n\beta-1)(2\alpha-n\beta-1)\ldots\left(\frac{n\beta}{\alpha}\alpha-n\beta-1\right)\ldots((n-1)\alpha-n\beta-1)\,p^n}{1.\,2.\,3\ldots n\alpha^n\,(-q)^{\frac{n(\alpha-\beta)-1}{\alpha}}}$$

wzoru (A), mamy dwa iloczyny które przedziela czynnik

$$\frac{n\beta}{\alpha}\alpha-n\beta-1 = -1.$$

Piérwszy

$$(\alpha - n\beta - 1)(2\alpha - n\beta - 1) \ldots . - 1$$

zawiéra $\frac{n\beta}{\alpha}$ czynników i dąży przeto do

$$(-n\beta)^{\frac{n\beta}{\alpha}}.$$

Że atoli w obudwóch iloczynach razem wziętych jest $n-1$ czynników, drugi

$$((n-1)\alpha - n\beta - 1)((n-2)\alpha - n\beta - 1) \ldots .$$

zawiéra

$$n - 1 - \frac{n\beta}{\alpha} = \frac{n(\alpha-\beta)}{\alpha} - 1$$

czynników i dąży do

$$(n(\alpha-\beta))^{\frac{n(\alpha-\beta)}{\alpha}};$$

gdy oraz w mianowniku iloczyn

$$n(n-1)(n-2) \ldots . 1$$

dąży do n^n.

Tak więc dla nieskończenie wielkiéj wartości n będzie

$$T_n = \frac{(-n\beta)^{\frac{n\beta}{\alpha}} (n(\alpha-\beta))^{\frac{n(\alpha-\beta)}{\alpha}} p^n}{n^n \alpha^n (-q)^{\frac{n(\alpha-\beta)}{\alpha}}}$$

$$= \frac{(-\beta)^{\frac{n\beta}{\alpha}} (\alpha-\beta)^{\frac{n(\alpha-\beta)}{\alpha}} p^n}{\alpha^n (-q)^{\frac{n(\alpha-\beta)}{\alpha}}}$$

A zatém

$$\lim \sqrt[n]{T_n} = \frac{(-\beta)^{\frac{\beta}{\alpha}} (\alpha-\beta)^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}} p}{\alpha (-q)^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}}}.$$

Jeżeli więc liczebnie jest

$$\frac{(-\beta)^{\frac{\beta}{\alpha}} (\alpha-\beta)^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}} p}{(\alpha-q)^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}}} < 1,$$

wzór (A) da szereg zbieżny.

4. Ten wzór zawiéra wszystkie piérwiastki równania (1). Aby je wyprowadzić, dostatecznem jest w miejscu $(-q)^{\frac{1}{\alpha}}$ wstawiać wszystkie piérwiastki dwuwyrazowego równania $x^\alpha + q = 0$. Że tu atoli idzie o to, aby otrzymać wyrazy tychże, jakikolwiek jest znak ilości danéj q, należy wyjść z równania

$$x = (-q)^{\frac{1}{\alpha}} (1)^{\frac{1}{\alpha}},$$

i w ogólnym wyrazie

$$x = (-q)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\cos \frac{2k\pi}{\alpha} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2k\pi}{\alpha} \right)$$

jego piérwiastków, czynić następnie

$$k = 0, \quad k = 1, \quad k = 2, \ldots . \quad k = \frac{\alpha}{2} \text{ albo } k = \frac{\alpha - 1}{2}$$

według tego, czy α jest parzystém lub nieparzystém.

W przypuszczeniu obecném, równanie (1) będzie więc miało:

1) Dwa piérwiastki rzeczywiste, jeżeli α jest parzystém, a q odjemném;
2) Jeden piérwiastek rzeczywisty, jeżeli α jest nieparzystém;
3) Wszystkie piérwiastki urojone, jeżeli α jest parzystém a q dodatném.

5. Kiedy wzór (A) nie daje się zastósować, wtedy już wszystkie piérwiastki równania (1) nie mogą być wyrażone według jednego i tego samego wzoru. Dzielę więc równanie przez x^β i kładę

$$x = \left(-p - \frac{q}{x^\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}},$$

co daje szereg następujący:

$$x = (-p)^{\frac{1}{\alpha-\beta}} - \frac{q}{(\alpha-\beta)(-p)^{\frac{\alpha-\beta-1}{\alpha-\beta}} x^\beta} - \frac{(\alpha-\beta-1)q^2}{1.2\,(\alpha-\beta)^2(-p)^{\frac{2\alpha-2\beta-1}{\alpha-\beta}} x^{2\beta}}$$

$$- \frac{(\alpha-\beta-1)(2\alpha-2\beta-1)q^3}{1.2.3\,(\alpha-\beta)^3(-p)^{\frac{3\alpha-3\beta-1}{\alpha-\beta}} x^{3\beta}} - \frac{(\alpha-\beta-1)(2\alpha-2\beta-1)(3\alpha-3\beta-1)q^4}{1.2.3.4\,(\alpha-\beta)^4(-p)^{\frac{4\alpha-4\beta-1}{\alpha-\beta}} x^{4\beta}} - \ldots .$$

. . . . . .

i postępując jak powyżéj, otrzymuję:

1) Dla $x = (-p)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$,

$$x = (-p)^{\frac{1}{\alpha-\beta}} - \frac{q}{(\alpha-\beta)(-p)^{\frac{\alpha-1}{\alpha-\beta}}} \ldots .$$

$$\frac{1}{x^\beta} = \frac{1}{(-p)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}} + \frac{\beta q}{(\alpha-\beta)(-p)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}} \ldots .$$

$$\frac{1}{x^{2\beta}} = \frac{1}{(-p)^{\frac{2\beta}{\alpha-\beta}}} \ldots ;$$

więc

$$- \frac{q}{(\alpha-\beta)(-p)^{\frac{\alpha-\beta-1}{\alpha-\beta}} x^\beta} = - \frac{q}{(\alpha-\beta)(-p)^{\frac{\alpha-1}{\alpha-\beta}}} - \frac{\beta q^2}{(\alpha-\beta)^2(-p)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-\beta}}} \ldots .$$

$$- \frac{(\alpha-\beta-1)q^2}{1.2\,(\alpha-\beta)^2(-p)^{\frac{2\alpha-2\beta-1}{\alpha-\beta}} x^{2\beta}} = - \frac{(\alpha-\beta-1)q^2}{1.2\,(\alpha-\beta)^2(-p)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-\beta}}} \ldots .$$

a przeto 2)

$$x = (-p)^{\frac{1}{\alpha-\beta}} - \frac{q}{(\alpha-\beta)(-p)^{\frac{\alpha-1}{\alpha-\beta}}} - \frac{(\alpha+\beta-1)q^2}{1.2\,(\alpha-\beta)^2(-p)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-\beta}}} \cdots$$

Teraz dla tych trzech wyrazów będzie

$$\frac{1}{x^\beta} = \frac{1}{(-p)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}} + \frac{\beta q}{(\alpha-\beta)(-p)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}} + \frac{\beta(\alpha+2\beta)q^2}{1.2\,(\alpha-\beta)^2(-p)^{\frac{2\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}} \cdots$$

$$\frac{1}{x^{2\beta}} = \frac{1}{(-p)^{\frac{2\beta}{\alpha-\beta}}} + \frac{2\beta q}{(\alpha-\beta)(-p)^{\frac{\alpha+2\beta}{\alpha-\beta}}} \cdots$$

$$\frac{1}{x^{3\beta}} = \frac{1}{(-p)^{\frac{3\beta}{\alpha-\beta}}} \cdots;$$

więc

$$-\frac{q}{(\alpha-\beta)(-p)^{\frac{\alpha-\beta-1}{\alpha-\beta}}x^\beta} = \cdots - \frac{\beta(\alpha+2\beta)q^3}{1.2(\alpha-\beta)^3(-p)^{\frac{3\alpha-1}{\alpha-\beta}}} \cdots$$

$$-\frac{(\alpha-\beta-1)q^2}{1.2\,(\alpha-\beta)^2(-p)^{\frac{2\alpha-2\beta-1}{\alpha-\beta}}x^{2\beta}} = \cdots - \frac{2\beta(\alpha-\beta-1)q^3}{1.2(\alpha-\beta)^3(-p)^{\frac{3\alpha-1}{\alpha-\beta}}} \cdots$$

$$-\frac{(\alpha-\beta-1)(2\alpha-2\beta-1)q^3}{1.2.3\,(\alpha-\beta)^3(-p)^{\frac{3\alpha-3\beta-1}{\alpha-\beta}}} = -\frac{(\alpha-\beta-1)(2\alpha-2\beta-1)q^3}{1.2.3(\alpha-\beta)^3(-p)^{\frac{3\alpha-1}{\alpha-\beta}}} \cdots$$

Otóż

$$-(2\alpha^2+5\alpha\beta-3\alpha+2\beta^2-3\beta+1)\frac{q^3}{1.2.3\,(\alpha-\beta)^3(-p)^{\frac{3\alpha-1}{\alpha-\beta}}}$$

$$= -\frac{(\alpha+2\beta-1)(2\alpha+\beta-1)q^3}{1.2.3(\alpha-\beta)^3(-p)^{\frac{3\alpha-1}{\alpha-\beta}}};$$

a przeto 3)

$$x = (-p)^{\frac{1}{\alpha-\beta}} - \frac{q}{(\alpha-\beta)(-p)^{\frac{\alpha-1}{\alpha-\beta}}} - \frac{(\alpha+\beta-1)q^2}{1.2\,(\alpha-\beta)^2(-p)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-\beta}}} - \frac{(\alpha+2\beta-1)(2\alpha+\beta-1)q^3}{1.2.3\,(\alpha-\beta)^3(-p)^{\frac{3\alpha-1}{\alpha-\beta}}} \cdots$$

Toż samo działanie posuwając daléj znajdujemy:

$$\frac{1}{x^\beta} = \frac{1}{(-p)^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}} + \frac{\beta q}{(\alpha-\beta)(-p)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}} + \frac{\beta(\alpha+2\beta)q^2}{1.2\,(\alpha-\beta)^2(-p)^{\frac{2\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}} + \frac{\beta(2\alpha^2+8\alpha\beta+6\beta^2)q^3}{1.2.3(\alpha-\beta)^3(-p)^{\frac{3\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}} \cdots$$

$$\frac{1}{x^{2\beta}} = \frac{1}{(-p)^{\frac{2\beta}{\alpha-\beta}}} + \frac{2\beta q}{(\alpha-\beta)(-p)^{\frac{\alpha+2\beta}{\alpha-\beta}}} + \frac{\beta(\alpha+3\beta)q^2}{(\alpha-\beta)^2(-p)^{\frac{2\alpha+2\beta}{\alpha-\beta}}} \cdots$$

$$\frac{1}{x^{3\beta}} = \frac{1}{(-p)^{\frac{3\beta}{\alpha-\beta}}} + \frac{3\beta q}{(\alpha-\beta)(-p)^{\frac{\alpha+3\beta}{\alpha-\beta}}} \cdots$$

$$\frac{1}{x^{4\beta}} = \frac{1}{(-p)^{\frac{4\beta}{\alpha-\beta}}} \cdots;$$

więc

$$-\frac{q}{(\alpha-\beta)(-p)^{\frac{\alpha-\beta-1}{\alpha-\beta}}x^{\beta}} = \ldots\ldots - \frac{\beta(2\alpha^2+8\alpha\beta+6\beta^2)q^4}{1.2.3(\alpha-\beta)^4(-p)^{\frac{4\alpha-1}{\alpha-\beta}}} \ldots\ldots$$

$$-\frac{(\alpha-\beta-1)q^2}{1.2(\alpha-\beta)^2(-p)^{\frac{2\alpha-2\beta-1}{\alpha-\beta}}x^{2\beta}} = \ldots - \frac{\beta(\alpha+3\beta)(\alpha-\beta-1)q^4}{1.2(\alpha-\beta)^4(-p)^{\frac{4\alpha-1}{\alpha-\beta}}} \ldots\ldots$$

$$-\frac{(\alpha-\beta-1)(2\alpha-2\beta-1)q^3}{1.2.3(\alpha-\beta)^3(-p)^{\frac{3\alpha-3\beta-1}{\alpha-\beta}}x^{3\beta}} = \ldots - \frac{\beta(\alpha-\beta-1)(2\alpha-2\beta-1)q^4}{1.2(\alpha-\beta)^4(-p)^{\frac{4\alpha-1}{\alpha-\beta}}} \ldots\ldots$$

$$-\frac{(\alpha-\beta-1)(2\alpha-2\beta-1)(3\alpha-3\beta-1)q^4}{1.2.3.4(\alpha-\beta)^4(-p)^{\frac{4\alpha-4\beta-1}{\alpha-\beta}}x^{4\beta}} = -\frac{(\alpha-\beta-1)(2\alpha-2\beta-1)(3\alpha-3\beta-1)q^4}{1.2.3.4(\alpha-\beta)^4(-p)^{\frac{4\alpha-1}{\alpha-\beta}}} \ldots\ldots;$$

a że

$$-(26\alpha^2\beta+26\alpha\beta^2-6\beta^3+26\alpha\beta+11\beta^2-6\beta-6\alpha^3+11\alpha^2$$

$$-6\alpha+1)\frac{q^4}{1.2.3.4(\alpha-\beta)^4(-p)^{\frac{4\alpha-1}{\alpha-\beta}}}$$

$$= -\frac{(\alpha+3\beta-1)(2\alpha+2\beta-1)(3\alpha+\beta-1)q^4}{1.2.3.4(\alpha-\beta)^4(-p)^{\frac{4\alpha-1}{\alpha-\beta}}},$$

wynika ztąd wzór

$$(B)\quad x = (-p)^{\frac{1}{\alpha-\beta}} - \frac{q}{(\alpha-\beta)(-p)^{\frac{\alpha-1}{\alpha-\beta}}} - \frac{(\alpha+\beta-1)q^2}{1.2(\alpha-\beta)^2(-p)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-\beta}}} - \frac{(\alpha+2\beta-1)(2\alpha+\beta-1)q^3}{1.2.3(\alpha-\beta)^3(-p)^{\frac{3\alpha-1}{\alpha-\beta}}}$$

$$-\frac{(\alpha+3\beta-1)(2\alpha+2\beta-1)(3\alpha+\beta-1)q^4}{1.2.3.4(\alpha-\beta)^4(-p)^{\frac{4\alpha-1}{\alpha-\beta}}} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots - \frac{(\alpha+(n-1)\beta-1)(2\alpha+(n-2)\beta-1)\ldots((n-1)\alpha+\beta-1)q^n}{1.2.3.4\ldots n(\alpha-\beta)^n(-p)^{\frac{n\alpha-1}{\alpha-\beta}}} - R_{n+1}.$$

6. Ponieważ

$$((n-1)\alpha+\beta-1)((n-2)\alpha+2\beta-1)\ldots 1$$

$$= ((n-1)\alpha+\beta-1)((n-2)\alpha+2\beta-1)\ldots(\alpha+(n-1)\beta-1)(0+n\beta-1)((n+1)\beta-\alpha-1)((n+2)\beta-2\alpha-1)\ldots 1,$$

można uczynić

$$((n-1)\alpha+\beta-1)((n-2)\alpha+2\beta-1)\ldots\ldots(\alpha+(n-1)\beta-1)$$

$$= \frac{((n-1)\alpha+\beta-1)((n-2)\alpha+2\beta-1)\ldots 1}{(n\beta-1)((n+1)\beta-\alpha-1)((n+2)\beta-2\alpha-1)\ldots 1};$$

a wtedy powyższy wyraz ogólny przybiera kształt taki:

$$T_n = \frac{((n-1)\alpha+\beta-1)((n-2)\alpha+2\beta-1)\ldots 1q^n}{n(n-1)\ldots 1\,(n\beta-1)((n+1)\beta-\alpha-1)\ldots 1(\alpha-\beta)^n(-p)^{\frac{n\alpha-1}{\alpha-\beta}}}$$

Teraz w iloczynie

$$((n-1)\alpha+\beta-1)((n-2)\alpha+2\beta-1)\ldots 1$$

jest

$$1 = (n-k)\alpha + k\beta - 1,$$

$$k = \frac{n\alpha-2}{\alpha-\beta};$$

zawiéra on więc

$$\frac{n\alpha-2}{\alpha-\beta}$$

czynników i dąży do

$$(n\alpha)^{\frac{n\alpha}{\alpha-\beta}}.$$

W owym zaś

$$(n\beta-1)((n+1)\beta-\alpha-1)((n+2)\beta-2\alpha-1)\ldots 1$$

jest

$$1 = (n+k-1)\beta - (k-1)\alpha - 1,$$

$$k = \frac{n\beta-2}{\alpha-\beta} + 1;$$

zawiéra on przeto

$$\frac{n\beta-2}{\alpha-\beta} + 1$$

czynników i dąży do

$$(n\beta)^{\frac{n\beta}{\alpha-\beta}};$$

kiedy równocześnie iloczyn

$$n(n-1)(n-2)\ldots 1$$

dąży do n^n.

Dla nieskończenie wielkiéj wartości n, będzie więc

$$T_n = \frac{(n\alpha)^{\frac{n\alpha}{\alpha-\beta}} q^n}{n^n (n\beta)^{\frac{n\beta}{\alpha-\beta}} (\alpha-\beta)^n (-p)^{\frac{n\alpha}{\alpha-\beta}}}$$

$$= \frac{\alpha^{\frac{n\alpha}{\alpha-\beta}} q^n}{\beta^{\frac{n\beta}{\alpha-\beta}} (\alpha-\beta)^n (-p)^{\frac{n\alpha}{\alpha-\beta}}};$$

a zatém

$$\lim \sqrt[n]{T_n} = \frac{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} q}{\beta^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}} (\alpha-\beta)(-p)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}}.$$

Dopóki więc liczebnie jest

$$\frac{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} q}{\beta^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}} (\alpha-\beta)(-p)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}} < 1,$$

wzór (B) daje α—β piérwiastków równania (1).

Ten stosunek współczynników p i q jest odwrotnym względem tego, który wymaga zastósowania wzoru (A); daje on więc wtedy owe α—β piérwiastków, kiedy wzór (A) zastósowanym być nie może.

7. Pozostaje nam β piérwiastków równania (1), których wzór (B) nie wyraża. Dzielę więc jeszcze równanie przez p i kładę

$$x = \left(-\frac{q}{p} - \frac{x^{\alpha}}{p}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

$$x = \left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{\beta}} - \frac{1}{\beta\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}}} \frac{x^{\alpha}}{p} - \frac{\beta-1}{1.2\beta^2\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{2\beta-1}{\beta}}} \frac{x^{2\alpha}}{p^2}$$

$$- \frac{(\beta-1)(2\beta-1)}{1.2.3\beta^3\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{3\beta-1}{\beta}}} \frac{x^{3\alpha}}{p^3} - \frac{(\beta-1)(2\beta-1)(3\beta-1)}{1.2.3.4\beta^4\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{4\beta-1}{\beta}}} \frac{x^{4\alpha}}{p^4} - \ldots\ldots$$

1) Dla $x = \left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{\beta}}$

będzie

$$x = \left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{\beta}} - \frac{1}{\beta p}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}} \ldots\ldots;$$

$$x^{\alpha} = \left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} - \frac{\alpha}{\beta p}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{2\alpha-\beta}{\beta}} \ldots;$$

$$x^{2\alpha} = \left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{2\alpha}{\beta}} \ldots\ldots;$$

więc

$$-\frac{1}{\beta}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}} \frac{x^{\alpha}}{p} = -\frac{1}{\beta p}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}} + \frac{\alpha}{\beta^2 p^2}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{2\alpha-2\beta+1}{\beta}} \ldots\ldots$$

$$-\frac{(\beta-1)}{1.2\beta^2}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{1-2\beta}{\beta}} \frac{x^{2\alpha}}{p^2} = -\frac{(\beta-1)}{1.2\beta^2 p^2}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{2\alpha-2\beta+1}{\beta}} \ldots\ldots;$$

a przeto 2)

$$x = \left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{\beta}} - \frac{1}{\beta p}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}} + \frac{(2\alpha-\beta+1)}{1.\,2\,\beta^2 p^2}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{2\alpha-2\beta+1}{\beta}} \ldots\ldots$$

Te zaś trzy wyrazy dają

$$x^{\alpha} = \left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} - \frac{\alpha}{\beta p}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{2\alpha-\beta}{\beta}} + \frac{\alpha(3\alpha-\beta)}{1.\,2\,\beta^2 p^2}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{3\alpha-2\beta}{\beta}} \ldots\ldots$$

$$x^{2\alpha} = \left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{2\alpha}{\beta}} - \frac{2\alpha}{\beta p}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{3\alpha-\beta}{\beta}} \ldots\ldots$$

$$x^{3\alpha} = \left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{3\alpha}{\beta}} \ldots\ldots;$$

więc

$$-\frac{1}{\beta}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}}\frac{x^{\alpha}}{p} = \ldots\ldots - \frac{\alpha(3\alpha-\beta)}{1.\,2\,\beta^3 p^3}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{3\alpha-3\beta+1}{\beta}} \ldots\ldots;$$

$$-\frac{\beta-1}{1.2\,\beta^2}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{1-2\beta}{\beta}}\frac{x^{2\alpha}}{p^2} = \ldots + \frac{2\alpha(\beta-1)}{1.\,2.\,\beta^3 p^3}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{3\alpha-3\beta+1}{\alpha}} \ldots\ldots;$$

$$-\frac{(\beta-1)(2\beta-1)}{1.\,2.\,3\,\beta^3}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{1-3\beta}{\beta}}\frac{x^{3\alpha}}{p^3} = -\frac{(\beta-1)(2\beta-1)}{1.\,2.3\beta^3 p^3}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{3\alpha-3\beta+1}{\alpha}} \ldots;$$

a że

$$-(9\alpha^2 - 9\alpha\beta + 6\alpha + 2\beta^2 - 3\beta + 1)\,\frac{1}{1\;2.\,3\,\beta^3 p^3}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{3\alpha-3\beta+1}{\beta}}$$

$$= -\frac{(3\alpha-\beta+1)(3\alpha-2\beta+1)}{1.\,2.\,3\,\beta^3 p^3}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{3\alpha-3\beta+1}{\beta}},$$

będzie 3)

$$x = \left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{\beta}} - \frac{1}{\beta p}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}} + \frac{2\alpha-\beta+1}{1.2\,\beta^2 p^2}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{2\alpha-2\beta+1}{\beta}}$$

$$-\frac{(3\alpha-\beta+1)(3\alpha-2\beta+1)}{1.\,2.\,3\,\beta^3 p^3}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{3\alpha-3\beta+1}{\beta}} \ldots\ldots$$

Toż samo działanie poprowadzone daléj daje nam

$$x^{\alpha} = \left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} - \frac{\alpha}{\beta p}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{2\alpha-\beta}{\beta}} + \frac{\alpha(3\alpha-\beta)}{1.\,2\,\beta^2 p^2}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{3\alpha-2\beta}{\beta}} - \frac{\alpha(16\alpha^2-12\alpha\beta+2\beta^2)}{1.\,2.\,3\,\beta^3 p^3}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{4\alpha-3\beta}{\beta}} \ldots\ldots;$$

$$x^{2\alpha} = \left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{2\alpha}{\beta}} - \frac{2\alpha}{\beta p}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{3\alpha-\beta}{\beta}} + \frac{\alpha(4\alpha-\beta)}{\beta^2 p^2}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{4\alpha-2\beta}{\beta}} \ldots\ldots;$$

$$x^{3\alpha} = \left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{3\alpha}{\beta}} - \frac{3\alpha}{\beta p}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{4\alpha-\beta}{\beta}} \ldots\ldots;$$

$$x^{4\alpha} = \left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{4\alpha}{\beta}} \ldots\ldots;$$

więc

$$-\frac{1}{\beta}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}}\frac{x^{\alpha}}{p}=\ldots\ldots+\frac{\alpha(16\alpha^2-12\alpha\beta+2\beta^2)}{1.2.3\,\beta^4p^4}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{4\alpha-4\beta+1}{\beta}}\ldots\ldots,$$

$$-\frac{\beta-1}{1.2\beta^2}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{1-2\beta}{\beta}}\frac{x^{2\alpha}}{p^2}=\ldots\ldots-\frac{\alpha(\beta-1)(4\alpha-\beta)}{1.2\,\beta^4p^4}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{4\alpha-4\beta+1}{\beta}}\ldots\ldots;$$

$$-\frac{(\beta-1)(2\beta-1)}{1.2.3\,\beta^3}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{1-3\beta}{\beta}}\frac{x^{3\alpha}}{p^3}=\ldots+\frac{3\alpha(\beta-1)(2\beta-1)}{1.2.3\,\beta^4p^4}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{4\alpha-4\beta+1}{\beta}}\ldots\ldots;$$

$$-\frac{(\beta-1)(2\beta-1)(3\beta-1)}{1.2.3.4\beta^4}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{1-4\beta}{\beta}}\frac{x^{4\alpha}}{p^4}=-\frac{(\beta-1)(2\beta-1)(3\beta-1)}{1.2.3.4\,\beta^4p^4}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{4\alpha-4\beta+1}{\beta}}\ldots\ldots$$

co czyni razem

$$(64\alpha^3-96\alpha^2\beta+44\alpha\beta^2+48\alpha^2-48\alpha\beta+12\alpha-6\beta^3$$

$$+11\beta^2-6\beta+1)\frac{1}{1.2.3.4\,\beta^4p^4}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{4\alpha-4\beta+1}{\beta}}$$

$$=\frac{(4\alpha-\beta+1)(4\alpha-2\beta+1)(4\alpha-3\beta+1)}{1.2.3.4\,\beta^4p^4}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{4\alpha-4\beta+1}{\beta}}.$$

I tak otrzymujemy wzór trzeci i ostatni

$$(C)\quad x=\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{\beta}}-\frac{1}{\beta p}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}}+\frac{2\alpha-\beta+1}{1.2\,\beta^2p^2}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{2\alpha-2\beta+1}{\beta}}$$

$$-\frac{(3\alpha-\beta+1)(3\alpha-2\beta+1)}{1.2.3\,\beta^3p^3}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{3\alpha-3\beta+1}{\beta}}$$

$$+\frac{(4\alpha-\beta+1)(4\alpha-2\beta+1)(4\alpha-3\beta+1)}{1.2.3.4\,\beta^4p^4}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{4\alpha-4\beta+1}{\beta}}-\ldots$$

$$\pm\frac{(n\alpha-\beta+1)(n\alpha-2\beta+1)\ldots(n\alpha-(n-1)\beta+1)}{1.2.3.4\ldots n\beta^np^n}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{n\alpha-n\beta+1}{\beta}}\mp R_{n+1}.$$

8. Granicę ilości $\sqrt[n]{t_n}$ znajdujemy tu tém samém przekształceniem, którego użyliśmy przy wzorze (B).

Jest bowiem

$$(n\alpha-\beta+1)(n\alpha-2\beta+1)\ldots.1$$
$$=(n\alpha-\beta+1)(n\alpha-2\beta+1)\ldots(n\alpha-(n-1)\beta+1)(n\alpha-n\beta+1)(n\alpha-(n+1)\beta+1)\ldots.1\ ;$$

a przeto

$$(n\alpha - \beta + 1)(n\alpha - 2\beta + 1) \ldots (n\alpha - (n-1)\beta + 1)$$
$$= \frac{(n\alpha - \beta + 1)(n\alpha - 2\beta + 1) \ldots . 1}{(n\alpha - n\beta + 1)(n\alpha - (n+1)\beta + 1) \ldots 1},$$

$$T_n = \frac{(n\alpha - \beta + 1)(n\alpha - 2\beta + 1) \ldots 1}{n(n-1) \ldots 1 (n\alpha - n\beta + 1)(n\alpha - (n+1)\beta + 1) \ldots 1 \beta^n p^n} \left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{n\alpha - n\beta + 1}{\beta}}$$

Teraz w iloczynie

$$(n\alpha - \beta + 1)(n\alpha - 2\beta + 1) \ldots . 1$$

mamy

$$1 = n\alpha - k\beta + 1$$
$$k = \frac{n\alpha}{\beta};$$

zawiéra on więc

$$\frac{n\alpha}{\beta}$$

czynników i dąży do

$$(n\alpha)^{\frac{n\alpha}{\beta}}.$$

A w iloczynie

$$(n\alpha - n\beta + 1)(n\alpha - (n+1)\beta + 1) \ldots . 1$$

mamy

$$1 = n\alpha - (n + k - 1)\beta + 1,$$
$$k = \frac{n(\alpha - \beta)}{\beta} + 1;$$

a zatém

$$\frac{n(\alpha - \beta)}{\beta} + 1$$

czynników. Dąży on więc do

$$(n(\alpha - \beta))^{\frac{n(\alpha - \beta)}{\beta}},$$

gdy oraz iloczyn

$$n(n-1) \ldots 1$$

dąży do n^n.

Dla nieskończenie wielkiéj wartości n, będzie więc

$$T_n = \frac{(n\alpha)^{\frac{n\alpha}{\beta}}}{n^n (n(\alpha - \beta))^{\frac{n(\alpha - \beta)}{\beta}} \beta^n p^n} \left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{n(\alpha - \beta)}{\beta}}$$

$$= \frac{\alpha^{\frac{n\alpha}{\beta}}}{(\alpha - \beta)^{\frac{n(\alpha - \beta)}{\beta}} \beta^n p^n} \left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{n(\alpha - \beta)}{\beta}};$$

a przeto

$$\lim \sqrt[n]{T_n} = \frac{\alpha^{\frac{\alpha}{\beta}}}{(\alpha-\beta)^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}}\,\beta p}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}}.$$

Gdy więc liczebnie jest

$$\frac{\alpha^{\frac{\alpha}{\beta}}}{(\alpha-\beta)^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}}\,\beta p}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}} < 1,$$

wzór (C) daje owe β piérwiastków niezawartych we wzorze (B). Gdy bowiem

$$\frac{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}q}{\beta^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}(\alpha-\beta)(-p)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}} < 1,$$

jest także

$$\frac{\alpha^{\frac{\alpha}{\beta}}}{(\alpha-\beta)^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}}\,\beta p}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}} = \left(\frac{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}q}{\beta^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}(\alpha-\beta)(-p)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}} < 1.$$

9. Wzory (B) i (C) użyte równocześnie dają więc wszystkie piérwiastki równania (1). Aby je otrzymać, należy wstawiać następnie we wzorze (B) na miejscu $(-p)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$ wszystkie piérwiastki

$$x = (-p)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}\left(\cos\frac{2k\pi}{\alpha-\beta} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{\alpha-\beta}\right)$$

równania $x^{\alpha-\beta} + p = 0$; a we wzorze (C) na miejscu $\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ wszystkie piérwiastki

$$x = \left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{\beta}}\left(\cos\frac{2k\pi}{\beta} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{\beta}\right)$$

równania $x^{\beta} + \frac{q}{p} = 0$.

Więc w przypadku do którego należą te dwa wzory, piérwiastki równania (1) wynikają z wartości rzeczywistych i urojonych, zawartych w parze powyższych dwóch wyrazów.

W obecném przypuszczeniu będzie więc miało równanie:

1) Wszystkie piérwiastki urojone, jeżeli α i β są parzyste, p i q dodatne;
2) Jeden piérwiastek rzeczywisty
   a) Jeżeli α jest nieparzyste, β parzyste, p i q tegoż samego znaku;
   b) Jeżeli α i β są nieparzyste, p dodatne a q jakiekolwiek;
3) Dwa piérwiastki rzeczywiste
   a) Jeżeli α i β są parzyste, q odjemne a p jakiekolwiek;
   b) Jeżeli α jest parzyste, β nieparzyste, p i q jakiekolwiek;
4) Trzy piérwiastki rzeczywiste
   a) Jeżeli α jest nieparzyste, β parzyste a p i q mają znaki przeciwne;
   b) Jeżeli α i β są nieparzyste, p jest odjemne a q jakiekolwiek;

a przeto

$$\lim \sqrt[n]{T_n} = \frac{\alpha^{\frac{\alpha}{\beta}}}{(\alpha-\beta)^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}}\beta p}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}}$$

Gdy więc liczebnie jest

$$\frac{\alpha^{\frac{\alpha}{\beta}}}{(\alpha-\beta)^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}}\beta p}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}} < 1,$$

wzór (C) daje owe β piérwiastków niezawartych we wzorze (B). Gdy bowiem

$$\frac{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}q}{\beta^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}(\alpha-\beta)(-p)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}} < 1,$$

jest także

$$\frac{\alpha^{\frac{\alpha}{\beta}}}{(\alpha-\beta)^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}}\beta p}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}} = \left(\frac{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}q}{\beta^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}}(\alpha-\beta)(-p)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}} < 1.$$

9. Wzory (B) i (C) użyte równocześnie dają więc wszystkie piérwiastki równania (1). Aby je otrzymać, należy wstawiać następnie we wzorze (B) na miejscu $(-p)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$ wszystkie piérwiastki

$$x = (-p)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}\left(\cos\frac{2k\pi}{\alpha-\beta} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{\alpha-\beta}\right)$$

równania $x^{\alpha-\beta} + p = 0$; a we wzorze (C) na miejscu $\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ wszystkie piérwiastki

$$x = \left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{\beta}}\left(\cos\frac{2k\pi}{\beta} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{\beta}\right)$$

równania $x^{\beta} + \frac{q}{p} = 0$.

Więc w przypadku do którego należą te dwa wzory, piérwiastki równania (1) wynikają z wartości rzeczywistych i urojonych, zawartych w parze powyższych dwóch wyrazów.

W obecném przypuszczeniu będzie więc miało równanie:

1) Wszystkie piérwiastki urojone, jeżeli α i β są parzyste, p i q dodatne;
2) Jeden piérwiastek rzeczywisty
   a) Jeżeli α jest nieparzyste, β parzyste, p i q tegoż samego znaku;
   b) Jeżeli α i β są nieparzyste, p dodatne a q jakiekolwiek;
3) Dwa piérwiastki rzeczywiste
   a) Jeżeli α i β są parzyste, q odjemne a p jakiekolwiek;
   b) Jeżeli α jest parzyste, β nieparzyste, p i q jakiekolwiek;
4) Trzy piérwiastki rzeczywiste
   a) Jeżeli α jest nieparzyste, β parzyste a p i q mają znaki przeciwne;
   b) Jeżeli α i β są nieparzyste, p jest odjemne a q jakiekolwiek;

5) Cztéry piérwiastki rzeczywiste, jeżeli α i β są parzyste, p odjemne a q dodatne.

10. Z tego co poprzedza wynika, że związki liczebne

$$\frac{(-\beta)^{\beta}(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta}p^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}(-q)^{\alpha-\beta}} < 1$$

$$\frac{\alpha^{\alpha}q^{\alpha-\beta}}{\beta^{\beta}(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta}(-p)^{\alpha}} < 1$$

oznaczają dwa systemy równań trzechwyrazowych.

11. W szczególnym przypadku, kiedy stósunek współczynników znajduje się na granicy przedzielającéj owe dwa systemy, równanie (1) może mieć pierwiastki wielokrotne. Lecz ażeby to nastąpiło, niezbędném jest, aby w równościach algiebraicznych

$$p = \left(\frac{\alpha^{\alpha}(-q)^{\alpha-\beta}}{(-\beta)^{\beta}(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$q = \left(\frac{\beta^{\beta}(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta}(-p)^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}},$$

które równocześnie powinny mieć miejsce, drugie strony były rzeczywiste. Gdy te warunki są dopełnione, równanie pochodne

$$\alpha x^{\alpha-\beta} + \beta p = 0$$

daje piérwiastek wielokrotny.

Przypuszczam najprzód, że wykładniki α i β nie są obadwa parzyste. A zatém przypadki, które tu wydarzyć się mogą, są następujące:

1) $$\alpha = 2r+1, \quad \beta = 2t+1;$$

więc

$$p = \left(\frac{(2r+1)^{2r+1}(-q)^{2r-2t}}{(-2t-1)^{2t+1}(2r-2t)^{2r-2t}}\right)^{\frac{1}{2r+1}}$$

jest odjemne, a

$$q = \left(\frac{(2t+1)^{2t+1}(2r-2t)^{2r-2t}p^{2r+1}}{(2r+1)^{2r+1}}\right)^{\frac{1}{2r-2t}}$$

dodatne lub odjemne.

2) $$\alpha = 2r+1, \quad \beta = 2t;$$

więc

$$p = \left(\frac{(2r+1)^{2r+1}(-q)^{2r+1-2t}}{(-2t)^{2t}(2r+1-2t)^{2r+1-2t}}\right)^{\frac{1}{2r+1}}$$

jest odjemne, a

$$q = \left(\frac{(2t)^{2t}(2r+1-2t)^{2r+1-2t}p^{2r+1}}{(2r+1)^{2r+1}}\right)^{\frac{1}{2r+1-2t}}$$

dodatne;

3) $$\alpha = 2r\ ,\quad \beta = 2t+1\ ;$$

więc

$$p = \left(\frac{(2r)^{2r}(-q)^{2r-2t-1}}{(-2t-1)^{2t+1}(2r-2t-1)^{2r-2t-1}}\right)^{\frac{1}{2r}}$$

jest dodatne lub odjemne, a

$$q = \left(\frac{(2t+1)^{2t+1}(2r-2t-1)^{2r-2t-1}(\pm p)^{2r}}{(2r)^{2r}}\right)^{\frac{1}{2r-2t-1}}$$

jest dodatne.

Jeżeli więc

1) α i β są nieparzyste, równanie (1) takie przybiera znaki

$$x^{\alpha} - px^{\beta} \pm q = 0\ ;$$

a że wtedy $\alpha-\beta$ jest liczbą parzystą, równanie pochodne

$$\alpha x^{\alpha-1} - \beta p x^{\beta-1} = 0$$

daje owe dwa piérwiastki rzeczywiste

$$x = \pm\left(\frac{\beta p}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}\ .$$

Piérwiastek dodatny odpowiada wartości dodatnéj ilości q.

Wstawiając go i wartość dodatną ilości q w powyższém równaniu, mamy najprzód

$$\left(\frac{\beta^{\alpha} p^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}} - p\left(\frac{\beta^{\beta} p^{\beta}}{\alpha^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}} + (\alpha-\beta)\left(\frac{\beta^{\beta} p^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}} = 0\ ;$$

a czyniąc

$$\left(\frac{\beta^{\alpha} p^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}} = \beta\left(\frac{\beta^{\beta} p^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}},\quad -p\left(\frac{\beta^{\beta} p^{\beta}}{\alpha^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}} = -\alpha\left(\frac{\beta^{\beta} p^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}},$$

otrzymujemy ostatecznie

$$(\beta-\alpha)\left(\frac{\beta^{\beta} p^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}} + (\alpha-\beta)\left(\frac{\beta^{\beta} p^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}} = 0\ .$$

Dla wartości odjemnych piérwiastka x i ilości q, toż samo przekształcenie daje nam

$$(\alpha-\beta)\left(\frac{\beta^{\beta} p^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}} - (\alpha-\beta)\left(\frac{\beta^{\beta} p^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}} = 0\ .$$

2) Kiedy α jest nieparzyste a β parzyste, równanie (1) jest takiém

$$x^{\alpha} - px^{\beta} + q = 0.$$

a równanie pochodne ma jeden tylko piérwiastek rzeczywisty

$$x = \left(\frac{\beta p}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$$

ponieważ wtedy $\alpha - \beta$ jest liczbą nieparzystą. Ten zaś piérwiastek wstawiony w powyższe równanie, daje

$$(\beta-\alpha)\left(\frac{\beta^{\beta} p^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}} + (\alpha-\beta)\left(\frac{\beta^{\beta} p^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}} = 0 ,$$

3) Nareszcie, kiedy α jest parzyste a β nieparzyste, może być

$$x^{\alpha} + px^{\beta} + q = 0$$

albo

$$x^{\alpha} - px^{\beta} + q = 0 ;$$

a że wtedy $\alpha - \beta$ jest nieparzystém równanie pochodne daje

$$x = \left(-\frac{\beta p}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}} ,$$

lub

$$x = \left(\frac{\beta p}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}} ;$$

podstawienie zaś tych piérwiastków w odpowiednych równaniach prowadzi zawsze do

$$(\beta-\alpha)\left(\frac{\beta^{\beta} p^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}} + (\alpha-\beta)\left(\frac{\beta^{\beta} p^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}} = 0 .$$

Widzieliśmy w tém co poprzedza, że kiedy równanie pochodne daje dwa piérwiastki rzeczywiste, wielokrotne piérwiastki, które one wyrażają, do dwóch różnych równań należą.

Więc równanie

$$x^{\alpha} + px^{\beta} + q = 0 ,$$

w którém wykładniki α i β nie są obadwa parzyste, może mieć tylko jeden wielokrotny piérwiastek rzeczywisty.

Piérwiastek taki

$$x = a\sqrt{-1}$$

wprowadziłby wtedy wartość urojoną w piérwszą część równania i nie spełniłby przeto oznaczonego w niém warunku.

Nie mogą też równania trzechwyrazowe zawiérać wielokrotnych piérwiastków tego kształtu

$$x = a \pm b\sqrt{-1} ;$$

albowiem jedna nierozłączna para dwukrotnych takich piérwiastków wymaga już pięciowyrazowego równania czwartego stopnia, którego nie sprowadzi do trójmianu, czynnik z innych piérwiastków wynikający.

Przypuszczam teraz, że w równaniu

$$x^{\alpha} + px^{\beta} + q = 0$$

wykładniki α i β są obadwa parzyste. Podstawieniem

$$x^{2(2m+1)} = y \quad \text{lub} \quad x^{4(2m+1)} = y ,$$

gdzie m może być zerem, otrzymamy nowe równanie zawiérające teżsame współczynniki, a w którém jeden przynajmniéj wykładnik będzie nieparzystym. A jeżeli w niém

$$y = Q$$

jest piérwiastkiem wielokrotnym, będzie

$$x = Q^{\frac{1}{2(2m+1)}} \text{ lub } x = Q^{\frac{1}{4(2m+1)}},$$

odpowiednym piérwiastkiem równania pochodnego

$$\alpha x^{\alpha-1} + \beta p x^{\beta-1} = 0 .$$

I mogą się wydarzyć następujące przypadki:

1) Wszystkie tegoż piérwiastka wartości jednomianem wyrażone, będą wielokrotnémi piérwiastkami danego równania, jeżeli w niém wstawione nie zmieniają znaków jego wyrazów. W równaniu

$$x^8 - px^4 + \frac{p^2}{4} = 0$$

żaden z piérwiastków

$$x = \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{4}}, \; x = -\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{4}}, \; x = \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{-1}, \; x = -\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{-1}$$

równania pochodnego

$$8x^7 - 4px^3 = 0$$

nie zmienia znaków i wszystkie są w niém wielokrotnémi;

2) Toż samo nastąpi, jeżeli tegoż piérwiastka wartości urojone zmienią w równaniu daném znak jednego tylko wyrazu. Tak jest w równaniu

$$x^4 + px^2 + \frac{p^2}{4} = 0$$

gdzie obadwa piérwiastki

$$x = \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}, \; x = -\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$$

równania pochodnego

$$4x^3 + 2px = 0$$

zmieniają znak drugiego wyrazu i są wielokrotnémi;

3) Gdy zaś w mowie będące wartości urojonc zmieniają znaki obudwóch piérwszych wyrazów, a otrzymane piérwiastki wielokrotne są rzeczywiste i urojone, należą one do dwóch równań, różniących się tylko znakiem ostatniego wyrazu. Równanie pochodne

$$6x^5 - 2px = 0$$

daje te cztéry piérwiastki:

$$x = \left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{4}}, \; x = -\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{4}}, \; x = \left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{-1}; \; x = -\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{-1} .$$

Piérwsze dwa rzeczywiste są wielokrotnémi w równaniu

$$x^6 - px^2 + 2\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}} ;$$

a dwa ostatnie urojone, które zmieniają znaki obudwóch piérwszych wyrazów, są wielokrotnémi w równaniu

$$x^6 - px^2 - 2\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}} .$$

12. Pozostaje nam sprawdzić, czy wzory (A), (B) i (C) mogą służyć do wyprowadzenia jednokrotnych piérwiastków równania (1), kiedy jest liczebnie

$$\frac{(-\beta)^{\beta}(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta}p^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}(-q)^{\alpha-\beta}} = 1 ,$$

albo, co jest tém samém

$$\frac{\alpha^{\alpha}q^{\alpha-\beta}}{\beta^{\beta}(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta}(-p)^{\alpha}} = 1 .$$

Zbieżność lub rozbieżność szeregu

$$Q = t_0 + t_1 + t_2 + \ldots t_n + R_{n+1} ,$$

w którym

$$\lim \sqrt[n]{t_n} = 1 ,$$

nie może być wykazaną bezpośredniém porównaniem z pewnym postępem jeometrycznym. Wtedy używamy szeregu

$$S = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^m} + r_{n+1} ,$$

w którym stosunek

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{(n+1)^m}{(n+2)^m}$$
$$= 1 - \frac{m}{n} + \frac{m(m+3)}{2n^2} - \ldots$$

dąży do jedności.

Widzimy już, że wyrazy jego postępują, malejąc nieograniczenie.

Teraz zatrzymując się przy wyrazie

$$\frac{1}{(n+1)^m}$$

znajdujemy w pozostających wyrazach takie stosunki:

$$\frac{n+2}{(n+2)^m} > \frac{1}{(n+2)^m} + \frac{1}{(n+3)^m} + \ldots + \frac{1}{(2n+3)^m} ,$$

$$\frac{2n+4}{(2n+4)^m} > \frac{1}{(2n+4)^m} + \frac{1}{(2n+5)^m} + \ldots + \frac{1}{(4n+7)^m} ,$$

$$\frac{4n+8}{(4n+8)^m} > \frac{1}{(4n+8)^m} + \frac{1}{(4n+9)^m} + \ldots + \frac{1}{(8n+15)^m} ,$$

. . . . . .

a że różnica

$$\frac{1}{(n+2)^m} - \frac{1}{(n+3)^m} = \frac{mn^{m-1} + \frac{5}{2}m(m-1)n^{m-2} + \ldots}{(n^2+5n+6)^m}$$

maleje nagle, kiedy n rośnie, idzie zatém, że biorąc n coraz większém, strony tych nierówności stają się coraz mniéj nierównemi. Więc suma piérwszych stron tych nierówności jest granicą, do któréj dąży reszta r_{n+1} szeregu S.

Otóż kiedy jest $m > 1$, ta granica daje postęp jeometryczny zbieżny

$$\frac{1}{(n+2)^{m-1}}\left(1 + \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{2m-2}} + \frac{1}{2^{3m-3}} + \ldots,\right.$$

którego sumą jest

$$\frac{2^{m-1}}{(2^{m-1}-1)(n+2)^{m-1}}.$$

Mamy więc wtedy

$$\frac{2^{m-1}}{(2^{m-1}-1)(n+2)^{m-1}} > r_{n+1} \quad ;$$

a że piérwszą stronę téj nierówności możemy uczynić tak małą jak chcemy, biorąc n dostatecznie wielkiém, toż samo oczywiście z drugą jéj stroną nastąpić musi. Szereg S jest przeto zbieżnym.

13. Wyobraźmy teraz przez

$$Q = t_0 + t_1 + t_2 + \ldots + t_n + R_{n+1}$$

szereg, którego wyrazy wszystkie mają znaki jednakie i od pewnego miejsca postępują, malejąc ciągle i nieograniczenie, a przez

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = 1 - \frac{\theta}{n} + \frac{\omega}{n^2} - \ldots,$$

stosunek jego dwóch po sobie następujących wyrazów, który dąży do jedności.

I niech będzie $\theta > 1$, a m liczba mniejsza od θ a większa od jedności.

Dla wartości dostatecznie wielkiéj n, będzie

$$1 - \frac{m}{n} + \frac{m(m+3)}{2n^2} - \ldots > 1 - \frac{\theta}{n} + \frac{\omega}{n^2} - \ldots,$$

to jest

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^m > \frac{t_{n+1}}{t_n} \quad ;$$

a zatém począwszy od téjże wartości n, wyrazy szeregu Q będą maleć nagléj, niż wyrazy szeregu zbieżnego

$$S = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots$$

i nakoniec będą mniejsze od wyrazów odpowiednich tegoż szeregu. Więc szereg Q będzie także zbieżnym.

Kiedy dla otrzymania ilości θ, bierzemy stosunek

$$\frac{n^\theta}{(n+k)^\theta} = 1 - \frac{\theta k}{n} + \frac{\theta(\theta+1)k^2}{1.2\,n^2} - \ldots$$

zamiast tego

$$\frac{n^\theta}{(n+1)^\theta} = 1 - \frac{\theta}{n} + \frac{\theta(\theta+1)}{1.2\,n^2} - \ldots,$$

dostatecznem jest podzielić przez k współczynnik drugiego wyrazu w szeregu, przedstawiającym stosunek

$$\frac{n^\theta}{(n+k)^\theta}.$$

14. Weźmy stosunek

$$\frac{T_{n+k}}{T_n} = \frac{(\alpha-(n+k)\beta-1)(2\alpha-(n+k)\beta-1)\ldots((n+k-1)\alpha-(n+k)\beta-1)\,p^k}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)(\alpha-n\beta-1)(2\alpha-n\beta-1)\ldots((n-1)\alpha-n\beta-1)\,\alpha^k(-q)^{\frac{(\alpha-\beta)k}{\alpha}}}$$

ze wzoru (A). Ponieważ w iloczynach zawiérających wykładniki α i β czynniki z obu stron maleją ku środkowi, równam czynnik nieoznaczony

$$m\alpha - (n+k)\beta - 1$$

wyrazu T_{n+k}, z piérwszym czynnikiem

$$\alpha - n\beta - 1$$

wyrazu T_n; i z równania

$$m\alpha - (n+k)\beta - 1 = \alpha - n\beta - 1$$

wnoszę:

$$m = \frac{k\beta}{\alpha} + 1 .$$

Otóż m jest liczbą całą, a zatém najmniejszą wartością ilości k będzie α. Więc

$$m = \beta + 1 .$$

Piérwszy przeto czynnik wspólny będzie

$$(\beta+1)\alpha - (n+\alpha)\beta - 1 ,$$

a poprzedzający go bezpośrednio w wyrazie $T_{n+\alpha}$,

$$\alpha\beta - (n+\alpha)\beta - 1 .$$

Teraz równam ostatni czynnik

$$(n-1)\alpha - n\beta - 1$$

wyrazu T_n z czynnikiem nieoznaczonym

$$(n+\alpha-u)\alpha - (n+\alpha)\beta - 1$$

wyrazu $T_{n+\alpha}$; a z równania

$$(n-1)\alpha - n\beta - 1 = (n+\alpha-u)\alpha - (n+\alpha)\beta - 1$$

otrzymuję

$$u = \alpha - \beta + 1 .$$

Ostatni więc czynnik wspólny będzie

$$(n+\beta-1)\alpha - (n+\alpha)\beta - 1 ,$$

a bezpośrednio po nim następujący

$$(n+\beta)\alpha - (n+\alpha)\beta - 1 .$$

Nareszcie, ponieważ

$$\frac{p^k}{\alpha^k(-q)^{\frac{(\alpha-\beta)k}{\alpha}}} = \frac{p^\alpha}{\alpha^\alpha(-q)^{\alpha-\beta}} ,$$

a

$$\frac{p^\alpha}{\alpha^\alpha(-q)^{\alpha-\beta}} = \frac{1}{(-\beta)^\beta(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta}} ,$$

według przypuszczonego związku liczebnego

$$\frac{(-\beta)^\beta(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta}p^\alpha}{a^\alpha(-q)^{\alpha-\beta}} = 1 ,$$

powyższy stosunek przybiera wyraz taki

$$\frac{T_{n+\alpha}}{T_n} = \frac{(\alpha-(n+\alpha)\beta-1)(2\alpha-(n+\alpha)\beta-1)\ldots(\beta\alpha-(n+\alpha)\beta-1)((n+\beta)\alpha-(n+\alpha)\beta-1)}{\ldots\ldots((n+\alpha-2)\alpha-(n+\alpha)\beta-1)((n+\alpha-1)\alpha-(n+\alpha)\beta-1)},$$
$$(n+1)(n+2)\ldots(n+\alpha)(-\beta)^{\beta}(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta}$$

Mamy teraz przemienić na wielomiany zawarte w tym wyrazie iloczyny. Czyniąc zawsze

$$1+2+3+\ldots\ldots i = \frac{i(i+1)}{2}$$

będziemy mieli

$$\left(n^{\beta}(-\beta)^{\beta} + \left(\frac{\alpha(\beta-1)}{2}+1\right)n^{\beta-1}(-\beta)^{\beta} + Pn^{\beta-2} + \ldots\right)$$

$$\frac{T_{n+\alpha}}{T_n} = \frac{\left(n^{\alpha-\beta}(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta} + \left(\frac{(\alpha-\beta-1)\alpha}{2}-1\right)n^{\alpha-\beta-1}(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta} + Qn^{\alpha-\beta-2} + \ldots\right)}{\left(n^{\alpha}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}n^{\alpha-1}+Rn^{\alpha-2}+\ldots\right)(-\beta)^{\beta}(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta}},$$

a po wykonaném mnożeniu i dzieleniu

$$\frac{T_{n+\alpha}}{T_n} = 1 - \frac{3\alpha}{2n} + \frac{S}{n^2} - \ldots;$$

więc

$$\theta = \frac{3}{2};$$

a przeto w powyższém przypuszczeniu wzór (A) daje szereg zbieżny.

15. Dla wzoru (B) kładę

$$\frac{T_{n+k}}{T_n} = \frac{(\alpha+(n+k-1)\beta-1)(2\alpha+(n+k-2)\beta-1)\ldots\ldots((n+k-1)\alpha+\beta-1)\,q^{k}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)(\alpha+(n-1)\beta-1)(2\alpha+(n-2)\beta-1)\ldots((n-1)\alpha+\beta-1)(\alpha-\beta)^{k}(-p)^{\frac{k\alpha}{\alpha-\beta}}}.$$

Czynniki tych iloczynów postępują rosnąc. Równam przeto piérwszy czynnik

$$\alpha+(n+k-1)\beta-1$$

wyrazu T_{n+k}, z nieoznaczonym czynnikiem

$$m\alpha+(n-m)\beta-1$$

wyrazu T_n; a równanie

$$\alpha+(n+k-1)\beta-1 = m\alpha+(n-m)\beta-1$$

daje

$$m = \frac{k\beta}{\alpha-\beta}+1.$$

Ponieważ m jest liczbą całą, najmniejszą wartością ilości k będzie $\alpha-\beta$; a zatém

$$m = \beta+1.$$

Piérwszy czynnik wspólny będzie więc

$$(\beta+1)\alpha+(n-\beta-1)\beta-1,$$

a poprzedzający go bezpośrednio w wyrazie T_n

$$\beta\alpha+(n-\beta)\beta-1.$$

Kładę teraz

$$(n-1)\alpha+\beta-1 = (n+\alpha-\beta-u)\alpha+u\beta-1,$$

równając nieoznaczony czynnik wyrazu $T_{n+\alpha-\beta}$ z ostatnim czynnikiem wyrazu T_n; co daje

$$u = \alpha+1 .$$

Więc ostatni czynnik wspólny będzie

$$(n-\beta-1)\alpha+(\alpha+1)\beta-1 ,$$

a bezpośrednio po nim następujący

$$(n-\beta)\alpha+\alpha\beta-1 .$$

Mamy też

$$\frac{q^{k}}{(\alpha-\beta)^{k}(-p)^{\frac{k\alpha}{\alpha-\beta}}} = \frac{q^{\alpha-\beta}}{(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta}(-p)^{\alpha}}$$

a

$$\frac{q^{\alpha-\beta}}{(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta}(-p)^{\alpha}} = \frac{\beta^{\beta}}{\alpha^{\alpha}}$$

według przypuszczonego związku liczebnego

$$\frac{\alpha^{\alpha}\, q^{\alpha-\beta}}{\beta^{\beta}(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta}(-p)^{\alpha}} = 1 ;$$

i tak otrzymujemy

$$\frac{T_{n+\alpha-\beta}}{T_n} = \frac{\big((n+\alpha-\beta-1)\alpha+\beta-1\big)\big((n+\alpha-\beta-2)\alpha+2\beta-1\big)\ \ldots\ \big((n-\beta)\alpha+\alpha\beta-1\big)\,\beta^{\beta}}{(n+1)(n+2)\ \ldots\ (n+\alpha-\beta)\big(\alpha+(n-1)\beta-1\big)\big(2\alpha+(n-2)\beta-1\big)\ldots\big(\beta\alpha+(n-\beta)\beta-1\big)\,\alpha^{\alpha}} ;$$

a wykonywając też same działania co w poprzedzającym razie znajdujemy następnie

$$\frac{T_{n+\alpha-\beta}}{T_n} = \frac{n^{\alpha}\,\alpha^{\alpha}+\left(\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-1)}{2}-1\right)n^{\alpha-1}\,\alpha^{\alpha}+Pn^{\alpha-2}+\ldots\ldots\ldots}{\left(n^{\alpha-\beta}+\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\beta+1)}{2}\,n^{\alpha-\beta-1}+Qn^{\alpha-\beta-2}+\ldots\right)\left(n^{\beta}\beta^{\beta}+\left(\frac{(\alpha-\beta)(\beta+1)}{2}-1\right)n^{\beta-1}\beta^{\beta}\right.}$$
$$\left.+Rn^{\beta-2}+\ldots\ldots\right) ,$$

$$\frac{T_{n+\alpha-\beta}}{T_n} = 1-\frac{3(\alpha-\beta)}{2n}+\frac{S}{n^2}-\ldots$$

Więc

$$\theta = \frac{3}{2}$$

a przeto w obecném przypuszczeniu wzór (B) daje szereg zbieżny.

16. Nakoniec stosunek

$$\frac{T_{n+k}}{T_n}$$

wzięty ze wzoru (C) przybiera wyraz taki

$$\frac{T_{n+k}}{T_n} = \frac{\big((n+k)\alpha-\beta+1\big)\big((n+k)\alpha-2\beta+1\big)\ldots\big((n+k)\alpha-(n+k-1)\beta+1\big)(-q)^{\frac{(\alpha-\beta)k}{\beta}}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+\beta)(n\alpha-\beta+1)(n\alpha-2\beta+1)\ldots\big(n\alpha-(n-1)\beta+1\big)\,\beta^{k}p^{\frac{\alpha k}{\beta}}} .$$

Tu czynniki zawiérające wykładniki α i β postępują malejąc.

Kładę więc

$$(n + k)\,\alpha - m\beta + 1 = n\alpha - \beta + 1 \ ,$$

równając czynnik nieoznaczony wyrazu T_{n+k} z piérwszym czynnikiem wyrazu T_n; a z tego równania wynika

$$m = \frac{\alpha k}{\beta} + 1 \ .$$

Że zaś m jest liczbą całą, najmniejszą wartością ilości k będzie β; a zatém

$$m = \alpha + 1 \ .$$

Piérwszy przeto wspólny czynnik będzie

$$(n + \beta)\,\alpha - (\alpha + 1)\,\beta + 1 \ ,$$

a poprzedzający go bezpośrednio w wyrażie $T_{n+\beta}$,

$$(n + \beta)\,\alpha - \alpha\beta + 1 \ .$$

Kładę teraz

$$(n + \beta)\,\alpha - (n + \beta - 1)\,\beta + 1 = n\alpha - (n - u)\,\beta + 1 \ ,$$

równając czynnik nieoznaczony wyrazu T_n z ostatnim czynnikiem wyrazu $T_{n+\beta}$; co daje

$$u = \alpha - \beta + 1 \ ;$$

Ostatni czynnik wspólny będzie więc

$$n\alpha - (n - \alpha + \beta - 1)\,\beta + 1$$

a bezpośrednio po nim następujący w wyrazie T_n,

$$n\alpha - (n - (\alpha - \beta))\,\beta + 1 \ .$$

Mamy oraz

$$\frac{(-q)^{\frac{(\alpha-\beta)k}{\beta}}}{\beta^k\, p^{\frac{\alpha k}{\beta}}} = \frac{(-q)^{\alpha-\beta}}{\beta^\beta\, p^\alpha} \ ,$$

a

$$\frac{(-q)^{\alpha-\beta}}{\beta^\beta\, p^\alpha} = \frac{(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta}}{\alpha^\alpha} \ ,$$

według związku liczebnego

$$\frac{\alpha^\alpha\,(-q)^{\alpha-\beta}}{\beta^\beta(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta}\,p^\alpha} = 1 \ .$$

Będzie więc

$$\frac{T_{n+\beta}}{T_n} = \frac{((n+\beta)\alpha-\beta+1)\,((n+\beta)\,\alpha-2\beta+1)\ldots((n+\beta)\,\alpha-\alpha\beta+1)\,(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta}}{(n+1)\,(n+2)\ldots(n+\beta)\,(n\alpha-(\alpha-\beta)\,\beta+1)\ldots(n\alpha-(n-1)\,\beta+1)\,\alpha^\alpha}$$

a po zmianie iloczynów na wielomiany

$$\frac{T_{n+\beta}}{T_n} = \frac{n^\alpha\,\alpha^\alpha + \left(\frac{\beta(\alpha-1)}{2} + 1\right) n^{\alpha-1}\,\alpha^\alpha + Pn^{\alpha-2} + \ldots}{\left(n^\beta + \frac{\beta\,(\beta+1)}{2}\,n^{\beta-1} + Qn^{\beta-2} + \ldots\right)\left(n^{\alpha-\beta}\,(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta} + \left(\frac{\beta(\alpha-\beta+1)}{2} + 1\right) n^{\alpha-\beta-1}\,(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta} + Rn^{\alpha-\beta-2} + \ldots\right)}$$

$$\frac{T_{n+\beta}}{T_n} = 1 - \frac{3\beta}{2n} + \frac{S}{n^2} - \ldots\ldots;$$

więc

$$\theta = \frac{3}{2} > 1 ,$$

a przeto w obecném przypuszczeniu wzór (C) daje szereg zbieżny.

Kiedy więc stosunek współczynników p i q znajduje się na saméj granicy przedzielającéj dwa systemy równań trzechwyrazowych, wszystkie trzy wzory (A), (B) i (C) użyte być mogą. Idzie zatém, że gdy w takim razie równanie nie ma wielokrotnych piérwiastków, ilość jego rzeczywistych i urojonych piérwiastków wynika ze wzoru (A). Czasem atoli wzory (B) i (C) dają nagléj zbieżne szeregi.

Piérwiastki wielokrotne mogą być także według tychże wzorów wyrażone. A że żaden z nich nie może dać dwóch równych piérwiastków, równanie ma wtedy tyle piérwiastków rzeczywistych i urojonych, ile ich wzory (B) i (C) dostarczyć mogą.